ZEITSCHRIFT FÜR ANGEWANDTE MATHEMATIK UND MECHANIK
INGENIEURWISSENSCHAFTLICHE FORSCHUNGSARBEITEN

Band 24 | 1944 | Heft 2

Inhalt:

HAUPTAUFSÄTZE

Zur Theorie und Konstruktion der Geschoßflugbahn.

Von *G. Schweikert* in Charlottenburg.

Es wird ein neues, einfaches und doch strenges und allgemeines Verfahren zur graphischen Konstruktion der Geschoßflugbahn entwickelt. Unter Zugrundelegung einer zusätzlichen, normalen Widerstandskomponente werden strenge und allgemeine ballistische Hauptgleichungen abgeleitet und Verfahren zu ihrer rechnerischen und mechanischen Integration mittels einer neuen Integriermaschine sowie zur experimentellen Ermittlung der Widerstandsgesetze angegeben.

Einleitung.

Wir setzen bei unseren folgenden Untersuchungen zunächst voraus, wie dieses in der Theorie der äußeren Ballistik üblich ist, daß die Resultierende des Luftwiderstandes des Geschosses in die Tangentenrichtung der Geschoßbahn fällt, und daß somit senkrecht zu der Tangente, d. i. in Richtung der Normale der Geschoßbahn keine Komponente auftritt. Obschon dieses streng nur dann gilt, wie man leicht durch eine einfache Überlegung zeigen kann, wenn die Symmetrieachse der Geschoßform, also praktisch meistens die Geschoßachse selbst durch den Schwerpunkt des Geschosses geht und genau in die Tangentenrichtung der Geschoßbahn fällt, was ja auch bei den durch Drall stabilisierten Geschossen bekanntlich nie zutrifft, hat man doch bisher in der Literatur die genannte einschränkende Bedingung nicht genauer festgelegt und formuliert.

Wenn die Symmetrieachse der Geschoßform mit der Bahntangente zusammenfällt, so gibt es zu jedem Flächenelement der Geschoßoberfläche ein genau symmetrisch gelegenes Flächenelement, das den genau gleichen Luftwiderstandskräften nach Größe und Richtung unterworfen ist. Zerlegt man nun den an jedem Flächenelement angreifenden Luftwiderstandsvektor in zwei Komponenten, von denen die eine in die Tangentenrichtung, d. i. also in unserem Falle auch in die Richtung der Symmetrieachse fällt, während die andere Komponente die dazu senkrechte Richtung der Normale der Geschoßbahn hat, so heben sich eben deshalb, weil die Bahntangente nach Voraussetzung auch Symmetrieachse der Geschoßform ist, die normalen Komponenten in den einzelnen Flächenelementen gegenseitig auf, so daß nur die tangentialen Komponenten übrigbleiben. Nur in diesem besonderen, einfachen Falle hat dann die in der Ballistik allgemein gebräuchliche Zerlegung des Luftwiderstandsvektors (W) in die horizontale Komponente (W_x) und die vertikale Komponente (W_y) in der einfachen Form:

$$W_x = W \cdot \cos \vartheta; \quad W_y = W \cdot \sin \vartheta$$

Gültigkeit, wobei ϑ der Neigungswinkel der Bahntangente gegen die horizontale x-Achse ist.

Ferner gilt auch nur in diesem Spezialfalle die bekannte Gleichung für die zentrifugale Beschleunigung des Geschosses, wie sie allgemein in der Literatur zu finden ist:

$$v^2 : \varrho = -g \cdot \cos \vartheta,$$

wobei v die Geschoßgeschwindigkeit, ϱ der Krümmungsradius der Geschoßbahn und g die Erdbeschleunigung ist.

Allgemein muß man demgegenüber beachten, daß je nach der Geschoßform und der Lage der Symmetrieachse dieser Form zur Bahntangente nicht nur eine tangentiale Komponente W_T, sondern auch eine normale Komponente W_N des Luftwiderstandsvektors auftreten kann[1]).

In Bild 1 bezeichnet x die Richtung der horizontalen Abszisse, T die Richtung der Bahntangente, N die Richtung der Bahnnormale, S die Richtung der Symmetrieachse des Geschosses und G die Richtung der Erdbeschleunigung in dem betrachteten Bahnelement. Der Winkel zwischen x und T sei wie üblich mit ϑ bezeichnet, derjenige zwischen T und S hingegen mit α. Dieser letztere ist also der sogenannte Anstellwinkel der Geschoßachse oder genauer der Symmetrieachse der Geschoßform gegen die Bahntangente.

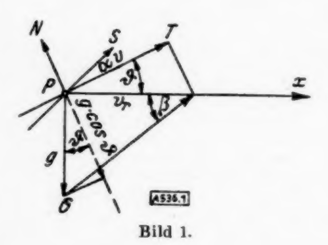


Bild 1.

Je nach der besonderen Form des Geschosses und der Größe des Winkels α bekommt man stets außer der Luftwiderstandskomponente W_T in Richtung der Bahntangente noch eine Widerstandskomponente W_n in der dazu senkrechten Richtung der Bahnnormale. Letztere kann nun je nach der besonderen Lage des Anstellwinkels und der besonderen Geschoßform entweder nach oberhalb der Tangente gerichtet, d. i. positiv sein und einen Auftrieb des Geschosses bedingen, oder aber unterhalb der Tangente liegen, d. i. negativ sein und einen Abtrieb des Geschosses zur Folge haben. Die Möglichkeit der seitlichen Abweichung aus der Mündungsebene der Geschoßflugbahn lassen wir dabei außer acht.

Die beiden Komponenten W_T und W_N lassen sich natürlich wiederum zu einer einzigen Resultierenden des Luftwiderstandes zusammensetzen, die mit der Bahntangente den Winkel γ bilden möge. Dann gelten die einfachen Beziehungen:

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{W_N}{W_T}; \qquad \gamma = \operatorname{arctg} \frac{W_N}{W_T}.$$

Für die horizontale bzw. vertikale Komponente des Luftwiderstandsvektors W_x und W_y aber gelten allgemein die Gleichungen:

$$W_x = W_T \cdot \cos \vartheta + W_N \cdot \sin \vartheta,$$

$$W_y = W_T \cdot \sin \vartheta - W_N \cdot \cos \vartheta.$$

Bezeichnet man schließlich den Winkel:

$$\vartheta + \gamma = \vartheta_r$$

und den Betrag des resultierenden Widerstandsvektors mit W_r, so läßt sich statt dessen auch einfacher schreiben:

$$W_x = W_r \cdot \cos \vartheta_r,$$

$$W_y = W_r \cdot \sin \vartheta_r$$

in offenkundiger Analogie zu den bisher üblichen Formulierungen. Dabei ist aber der Winkel $\vartheta_r = \vartheta + \gamma$ an die Stelle des Winkels ϑ getreten, wobei γ der Winkel zwischen der Luftwiderstandsresultierenden und der Bahntangente ist, und nur mit dieser Festsetzung gelten die vorstehenden einfachen Beziehungen allgemein. Auch dieser Umstand ist bisher in der ballistischen Literatur nicht genauer formuliert worden.

Schließlich tritt noch für die zentrifugale Beschleunigung des Geschosses an die Stelle der gebräuchlichen Gleichung:

$$v^2 : \varrho = -g \cdot \cos \vartheta$$

allgemein die genauere Beziehung:

$$\frac{v^2}{\varrho} = W_N - g \cdot \cos \vartheta = \varrho \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2,$$

wie sich aus Bild 1 ohne weiteres ablesen läßt, wobei $\frac{d\vartheta}{dt}$ die Winkelgeschwindigkeit der Bahntangente ist.

[1]) Vgl. C. Cranz: Lehrbuch der Ballistik, 1. Bd. Berlin 1925, § 17, S. 108, sowie Ergänzungsband Berlin 1936, § 12, S. 32; Th. Vahlen: Ballistik, Berlin 1942, S. 16 ff.

Wir beschränken uns im folgenden zunächst auf den einfacheren Spezialfall, daß die Symmetrieachse der Geschoßform mit der Tangente der Geschoßbahn zusammenfällt und somit:

$$W_N = 0; \quad \gamma = 0; \quad \vartheta_r = \vartheta$$

ist und formulieren anschließend die genaueren Gleichungen, welche auch der Normalkomponente des Luftwiderstandes Rechnung tragen.

§ 1. Graphische Konstruktion der Geschoßbahn.

Wir gehen aus von den beiden bekannten Differentialgleichungen der Geschoßbahn:

$$\frac{v^2}{\varrho} = -g \cdot \cos\vartheta = \varrho \cdot \left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2$$

für die normale Richtung und:

$$\frac{dv}{dt} = -W_T - g \cdot \sin\vartheta$$

für die tangentiale Richtung, wobei die letztere Gleichung auch allgemein für beliebige Anstellwinkel der Symmetrieachse zur Bahntangente Gültigkeit hat, da ja der Beschleunigungsvektor immer die Richtung der Bahntangente hat.

Aus der ersten der vorstehenden Gleichungen erhält man sofort:

$$v = \varrho \cdot \frac{d\vartheta}{dt}; \quad \frac{d\vartheta}{dt} = \frac{v}{\varrho} = \frac{-g \cdot \cos\vartheta}{v} = -\frac{g}{v_r},$$

wenn wir noch:

$$\frac{v}{\cos\vartheta} = v_r$$

setzen. Die Größe v_r kann man leicht graphisch gewinnen, indem man auf dem Geschwindigkeitsvektor in seinem Endpunkte eine Senkrechte errichtet, die auf der Abszissenachse x den Wert v_r abschneidet. Verbinden wir dessen Endpunkt mit dem Endpunkt des Erdbeschleunigungsvektors g und bezeichnen den Winkel an der Spitze mit β, so gilt:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{g}{v_r} = \left|\frac{v}{\varrho}\right|.$$

Man gewinnt also den Krümmungsradius in dem betrachteten Bahnpunkte sofort, wenn man im Abstande v eine Parallele zur x-Achse zieht und von deren Schnittpunkte mit der zuletzt gezogenen Verbindungslinie, d. i. dem freien Schenkel des Winkels β eine Senkrechte auf die Abszissenachse fällt. Der Abstand des Fußpunktes derselben von dem Scheitelpunkte des Winkels β gibt die Größe des Krümmungsradius ϱ (vgl. Bild 2).

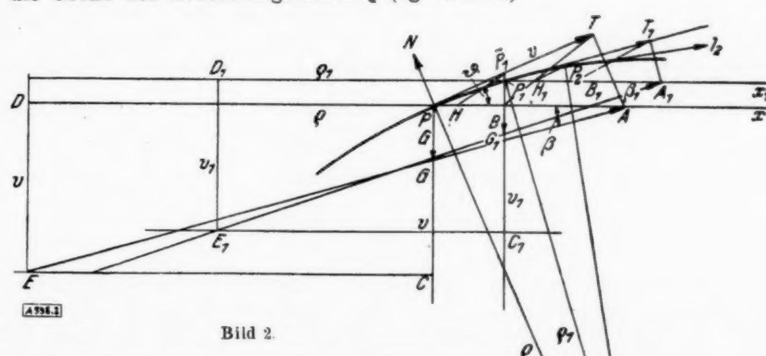


Bild 2.

Wir errichten sodann in dem betrachteten Bahnpunkt P eine Senkrechte auf dem Geschwindigkeitsvektor v, d. h. auf der Bahntangente und tragen auf dieser ϱ ab, so erhalten wir den Krümmungsmittelpunkt O der Geschoßbahn im Punkte P. Schlagen wir um O einen Kreis mit ϱ, so liefert dieser den Krümmungs- oder Oskulationskreis, der den Verlauf der Flugbahn im Punkte P für den Bereich des Winkelelementes $d\vartheta$ darstellt. Wir ziehen also einen zweiten Radius von O aus, der den kleinen Winkel $\Delta\vartheta$ mit OP bildet und uns den neuen Flugbahnpunkt P_1 liefert.

Die Senkrechte in P_1 auf OP_1 gibt die Richtung des neuen Geschwindigkeitsvektors v_1. Um auch seinen absoluten Betrag zu ermitteln, benutzen wir die zweite der obigen Grundgleichungen:

$$\frac{dv}{dt} = -W_T - g \cdot \sin\vartheta.$$

Dabei setzen wir voraus, daß der Geschoßwiderstand:

$$W_T = c \cdot \delta(y) \cdot v^2 \cdot K(v, y)$$

durch eine Tabelle oder Kurve als Funktion der Geschwindigkeit v und der Höhe y für beliebige Luftzustände (Temperatur, Wind und Feuchtigkeit) gegeben ist. Desgleichen kann die Erdbeschleunigung g tabellarisch als Funktion der Höhe y festgelegt sein. Die Strecke $g \cdot \sin\vartheta$ gewinnt man leicht an Hand von Bild 2, indem man vom Endpunkt G des Beschleunigungsvektors g das Lot auf den Krümmungsradius OP fällt. Die Länge dieses Lotes ist $g \cdot \sin\vartheta$. Wir formen nun die obige Gleichung um, indem wir beiderseits durch v dividieren und erhalten so:

$$\frac{\mathrm{d}v}{v \cdot \mathrm{d}t} = -\frac{W_T + g \cdot \sin\vartheta}{v}.$$

Die Strecke $v \cdot \mathrm{d}t$ ist aber nichts anderes wie die Länge des Bogens unseres Krümmungskreises zwischen P und P_1. Wir gewinnen somit $\mathrm{d}v$ leicht durch eine Ähnlichkeitskonstruktion. Wir tragen die Strecke $v \cdot \mathrm{d}t$ auf dem Geschwindigkeitsvektor v von P aus ab, oder ersetzen einfacher die Strecke $v \cdot \mathrm{d}t$ durch das zugehörige Tangentenstück $P\bar{P}_1$, das der Radius OP_1 auf der Tangente (v) in $\bar{P}_1$ abschneidet.

Tragen wir also die Strecken W_T und $g \cdot \sin\vartheta$ nacheinander auf der Abszissenachse von P aus ab, verbinden den Endpunkt mit dem Ende des Geschwindigkeitsvektors v und ziehen durch den Endpunkt $\bar{P}_1$ von $v \cdot \mathrm{d}t$ eine Parallele zu dieser Verbindungslinie, so schneidet diese auf der Abszissenachse die Strecke Δv ab. Die Größe des neuen Geschwindigkeitsvektors v_1 im Punkte P_1 ist dann sofort bestimmt:

$$v_1 = v - \Delta v.$$

Wir tragen somit auf der Senkrechten, die in P_1 auf OP_1 errichtet ist, die Strecke $v - \Delta v$ ab und haben damit den neuen Geschwindigkeitsvektor in P_1 erhalten. Nunmehr kann von diesem aus die gleiche Konstruktion, wie vorstehend von v ausgehend beschrieben wurde, wiederholt werden, um einen neuen Flugbahnpunkt P_2 und den zugehörigen Geschwindigkeitsvektor v_2 zu erhalten[2]). Fällen wir von P_1 auf die x-Achse das Lot und bezeichnen seinen Fußpunkt mit F, so ist $PF = \Delta x$ und $P_1F = \Delta y$.

In Bild 2 bestehen also folgende Beziehungen:

$$PG = g; \quad PT = v; \quad PA = v_r; \quad PC = DE = v; \quad AD = PO = \varrho; \quad \measuredangle PAG = \beta;$$
$$PP_1 = v \cdot \Delta t; \quad \measuredangle POP_1 = \Delta\vartheta; \quad PB = g \cdot \sin\vartheta + W_T; \quad PH = \Delta v;$$
$$P_1T_1 = v_1 = v - \Delta v; \quad PF = \Delta x; \quad P_1F = \Delta y.$$

Man kann diese Methode noch leicht in dem einleitend dargestellten Sinne verallgemeinern und der Normalkomponente W_N des Luftwiderstandes Rechnung tragen, wenn man in der obigen Definitionsgleichung für den Winkel β den Wert g der Erdbeschleunigung durch den Ausdruck:

$$g - \frac{W_N}{\cos\vartheta} = g_r,$$

d. h. durch einen reduzierten Wert g_r ersetzt:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{g_r}{v_r} = \left|\frac{v}{\varrho}\right|.$$

Ferner kann man für eine genauere Konstruktion von Fernbahnen der Veränderlichkeit des Vektors g nach Richtung und Betrag mit der Höhe und der Zentrifugalkraft bzw. Corioliskraft in bekannter Weise Rechnung tragen, indem man den entsprechenden Vektor G der Erdbeschleunigung in den einzelnen Bahnpunkten (P_i) der Geschoßbahn in seiner Neigung gegen die senkrechte Ordinatenachse veränderlich zeichnet entsprechend der jeweiligen Änderung der geographischen Breite φ und des Korrekturwinkels:

$$\sin\delta = \frac{n^2 \cdot R \cdot \sin^2\varphi_0}{2g} = \frac{n^2 \cdot R \cdot \sin^2\varphi}{2g_0},$$

wobei R der Erdradius, n die Winkelgeschwindigkeit der Erddrehung, g_0 die Erdbeschleunigung im Pol und φ_0 der Winkel zwischen der Äquatorebene und dem Erdradius zum Anfangspunkt (P_0) der Geschoßbahn ist:

$$\varphi = \varphi_0 + \delta.$$

[2]) Die hier beschriebene neue Methode ist grundsätzlich verschieden von den bekannten graphischen Verfahren von C. Cranz und R. Rothe sowie von Th. Vahlen, hingegen bestehen einige Berührungspunkte mit den ältesten graphischen Methoden von Poncelet: Leçons de mécanique industrielle. Metz 1828/29, S. 55, und Didion: Traité de ballistique, Paris 1848, S. 196.

Es bedarf kaum der Erwähnung, daß man die hier beschriebene Methode zur stückweisen graphischen Konstruktion der Geschoßbahn auch ohne weiteres mit Hilfe der abgeleiteten Gleichungen zur rechnerischen Festlegung der Geschoßbahn durch einzelne Tabellenwerte verwenden kann, und zwar erhält man zunächst die Geschoßgeschwindigkeit v als Funktion des Neigungswinkels ϑ, während man die Zeit t sofort aus der Beziehung:

$$v \cdot \Delta t = \varrho \cdot \Delta \vartheta; \quad \Delta t = \frac{\varrho \cdot \Delta \vartheta}{v}$$

gewinnt. Schließlich bekommt man die x- und y-Ordinaten aus den Gleichungen:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \cdot \cos\vartheta; \quad \Delta x = v \cdot \Delta t \cdot \cos\vartheta = \varrho \cdot \Delta\vartheta \cdot \cos\vartheta;$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v \cdot \sin\vartheta; \quad \Delta y = v \cdot \Delta t \cdot \sin\vartheta = \varrho \cdot \Delta\vartheta \cdot \sin\vartheta.$$

§ 2. Ableitung einer neuen Hauptgleichung.

Wir wollen nunmehr eine neue, wichtige und interessante Form der Hodographengleichung ableiten. Dazu gehen wir von den beiden Komponentengleichungen der Kraft in tangentialer Richtung, d. i. in Richtung des Geschwindigkeitsvektors (v) im Schwerpunkt des Geschosses und in normaler Richtung, d. i. in Richtung des zentrifugalen Beschleunigungsvektors ($v^2 : \varrho$) aus. Für die tangentiale Beschleunigung erhält man sofort die Beziehung:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -W_T - g \cdot \sin\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (1),$$

während sich für die normale Beschleunigung auf Grund der bekannten Beziehung für die Zentrifugalkraft mit dem Krümmungsradius ϱ der Geschoßbahn und der Winkelgeschwindigkeit $\mathrm{d}\vartheta : \mathrm{d}t$ die Gleichung ergibt:

$$\frac{v^2}{\varrho} = v \cdot \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = W_N - g \cdot \cos\vartheta \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Darin ist W_T die tangentiale Komponente und W_N die normale Komponente des Luftwiderstandes, erstere in Richtung des Geschwindigkeitsvektors, letztere in der der Erdbeschleunigung entgegengesetzten Richtung positiv gerechnet.

Aus den vorstehenden Gl. (1) und (2) erhält man durch einfache Umformung die Beziehungen:

$$g \cdot \sin\vartheta = -(W_T + v'); \quad v' = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \ldots \ldots \quad (1^x),$$

$$g \cdot \cos\vartheta = W_N - v \cdot \vartheta'; \quad \vartheta' = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} \quad \ldots \ldots \quad (2^x).$$

Als weitere dritte Gleichung tritt hinzu die Beziehung für die vertikale Geschwindigkeitskomponente:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v \cdot \sin\vartheta = -\frac{v}{g} \cdot (W_T + v') \quad \ldots \ldots \quad (3).$$

Die vorstehende Gl. (1) differentieren wir noch einmal nach t und erhalten:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}W_T}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} \cdot \sin\vartheta - g \cdot \cos\vartheta \cdot \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}; \\ &\mathrm{d}W_T = \frac{\partial W_T}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial W_T}{\partial v} \cdot \mathrm{d}v; \quad \frac{\mathrm{d}W_T}{\mathrm{d}t} = \overline{W}_y \cdot v \cdot \sin\vartheta + \overline{W}_v \cdot v' \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (4).$$

Wir erweitern die Gl. (4) mit v und die Gl. (2) mit $g \cdot \cos\vartheta$ und subtrahieren beide voneinander, so ergibt sich:

$$\left.\begin{aligned} &W_N \cdot g \cdot \cos\vartheta - g^2 \cdot \cos^2\vartheta + v \cdot (v'' + W_T' + g' \cdot \sin\vartheta) = 0; \\ &g' = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}y} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \overline{g}_y \cdot v \cdot \sin\vartheta; \quad \overline{g}_y = -\frac{2g}{R} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (5).$$

Hierin führen wir für W_T' und g' die oben abgeleiteten Beziehungen ein:

$$\left.\begin{aligned} &g^2 \cdot \cos^2\vartheta - \overline{g}_y \cdot v^2 \cdot \sin^2\vartheta - W_N \cdot g \cdot \cos\vartheta - \overline{W}_y \cdot v^2 \cdot \sin\vartheta - \overline{W}_v \cdot v \cdot v' - v \cdot v'' = 0 \\ &(g^2 + \overline{g}_y \cdot v^2) \cdot \cos^2\vartheta - W_N \cdot g \cdot \cos\vartheta + \overline{W}_y \cdot \frac{v^2}{g} \cdot (v' + W_T) - \overline{W}_v \cdot v \cdot v' - v \cdot v'' - \overline{g}_y \cdot v^2 = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (6).$$

Dieses ist eine quadratische Gleichung für $\cos\vartheta$, die wir nach $g\cdot\cos\vartheta$ auflösen:

$$\left.\begin{aligned} g\cdot\cos\vartheta &= \frac{1}{2}\,\frac{W_N}{1+\bar{g}_y\cdot\left(\frac{v}{g}\right)^2} \\ &\pm\sqrt{\frac{1}{4}\,\frac{W_N^2}{\left[1+\bar{g}_y\cdot\left(\frac{v}{g}\right)^2\right]^2}+\frac{v\cdot v''+\overline{W}_v\cdot v\cdot v'+\bar{g}_y\cdot v^2-\overline{W}_y\cdot\frac{v^2}{g}\,(v'+W_T)}{1+\bar{g}_y\cdot\left(\frac{v}{g}\right)^2}} \end{aligned}\right\} \quad . \; . \; . \; (7).$$

Da der Winkel ϑ nur zwischen $+\frac{\pi}{2}$ und $-\frac{\pi}{2}$ variieren kann, so ist $g\cdot\cos\vartheta$ stets positiv und mithin kann nur das positive Vorzeichen vor dem Wurzelausdruck praktische Bedeutung haben:

$$g\cdot\cos\vartheta=\frac{1}{2}\,\frac{W_N}{1+\varepsilon_g}+\sqrt{\frac{1}{4}\,\frac{W_N^2}{(1+\varepsilon_g)^2}+\frac{v}{1+\varepsilon_g}\cdot\left(v''+\overline{W}_v\cdot v'-\overline{W}_y\cdot\frac{v}{g}\cdot v'-\overline{W}_y\cdot W_T\cdot\frac{v}{g}+\bar{g}_y\cdot v\right)} \quad (8),$$

$$g\cdot\sin\vartheta=-(W_T+v') \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (9);$$

dabei ist:

$$\varepsilon_g=\bar{g}_y\cdot\frac{v^2}{g^2}=-2\cdot\frac{v^2}{g\cdot R}=\left(\frac{v}{\sqrt{\frac{R\cdot g}{2}}}\right)^2; \qquad \sqrt{\frac{g\cdot R}{2}}=5.59\cdot 10^3\,\frac{m}{\sec} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (10).$$

Wir quadrieren beide Gleichungen und addieren sie:

$$\begin{aligned} g^2-(W_T+v')^2 &= \frac{1}{2}\,\frac{W_N^2}{(1+\varepsilon_g)^2}+\frac{v}{1+\varepsilon_g}\cdot\left[v''+\left(\overline{W}_v-\overline{W}_y\cdot\frac{v}{g}\right)\cdot v'+\left(\bar{g}_y-\overline{W}_y\cdot\frac{W_T}{g}\right)\cdot v\right] \\ &+\frac{W_N}{1+\varepsilon_g}\cdot\sqrt{\frac{1}{4}\,\frac{W_N^2}{(1+\varepsilon_g)^2}+\frac{v}{1+\varepsilon_g}\cdot\left[v''+\left(\overline{W}_v-\overline{W}_y\cdot\frac{v}{g}\right)\cdot v'+\left(\bar{g}_y-\overline{W}_y\cdot\frac{W_T}{g}\right)\cdot v\right]}\,. \end{aligned}$$

Zur Abkürzung der Schreibweise fassen wir vorübergehend die Glieder, welche die Ableitungen der Widerstandsfunktion W_T enthalten, durch eine Bezeichnung zusammen, indem wir setzen:

$$\left(\overline{W}_v-\frac{\overline{W}_y}{g}\cdot v\right)\cdot v'+\left(\bar{g}_y-\frac{\overline{W}_y}{g}\cdot W_T\right)\cdot v=\overline{W}_a \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (11).$$

Wir schaffen den Wurzelausdruck auf eine Seite und quadrieren die ganze Gleichung:

$$[g^2-(W_T+v')^2]^2-2\cdot\left[\frac{1}{2}\,\frac{W_N^2}{(1+\varepsilon_g)^2}+\frac{v}{1+\varepsilon_g}\cdot(v''+\overline{W}_a)\right]\cdot[g^2-(W_T+v')^2]+\frac{v^2}{(1+\varepsilon_g)^2}\cdot(v''+\overline{W}_a)^2=0.$$

Vorstehender Ausdruck läßt sich wiederum in folgender übersichtlicher Weise zusammenfassen:

$$\left[g^2-(W_T+v')^2-\frac{v}{1+\varepsilon_g}\cdot(v''+\overline{W}_a)\right]^2=\frac{W_N^2}{(1+\varepsilon_g)^2}\cdot[g^2-(W_T+v')^2] \quad . \; . \; . \; . \; (12).$$

Damit haben wir eine Differentialgleichung zweiter Ordnung und zweiten Grades für die Geschoßgeschwindigkeit v als Funktion der Zeit t gewonnen. Die darin enthaltenen partiellen Differentialquotienten des Widerstandes $\overline{W}_y$ und der Beschleunigung $\bar{g}_y$ nach der Höhe y können nach bekannten Gesetzmäßigkeiten mit ausreichender Genauigkeit als konstant angesehen werden. Dabei ist, wie schon oben erwähnt:

$$\bar{g}_y=-2\cdot\frac{g}{R}=-3{,}08\cdot 10^{-6}\,\sec^{-2};$$

$R=$ Erdradius, $\overline{W}_y=-1{,}1\cdot 10^{-4}\cdot W_{T_0}$, wobei W_{T_0} der Widerstand bei der Luftdichte δ_0 ist. Die Normalkomponente W_N wie auch die Tangentialkomponente W_T des Luftwiderstandes sind allgemein noch Funktionen des Anstellwinkels α der Symmetrieachse der Geschoßform gegen die Bahntangente. W_T ist überdies als Funktion der Geschwindigkeit v als gegeben vorausgesetzt.

Da die vorstehende Differentialgleichung die unabhängige Variable t nicht explizit enthält, so läßt sich ihre Ordnung erniedrigen durch die Substitution:

$$\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}v}{v'}; \quad v''=\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}t}=v'\cdot\frac{\mathrm{d}v'}{\mathrm{d}v}=p\cdot\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}v}=\bar{p}\cdot p; \quad p=v' \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; (13),$$

wobei der Querstrich die Ableitung nach v bezeichnet. Damit ergibt sich folgende Differentialgleichung erster Ordnung:

$$g^2 - (W_T + p)^2 - \frac{v}{1+\varepsilon_g}\cdot(p\cdot\bar{p} + \overline{W}_a) = \frac{W_N}{1+\varepsilon_g}\cdot\sqrt{g^2-(W_T+p)^2}\,; \quad p = \frac{\mathrm{d}\,v}{\mathrm{d}\,t} \qquad (14);$$

worin:

$$\overline{W}_a = \left(\overline{W}_v - \frac{\overline{W}_y}{g}\cdot v\right)\cdot p - \left(\frac{\overline{W}_y}{g}\cdot W_T - \bar{g}_y\right)\cdot v$$

ist. Durch einfache Umformung gewinnt man schließlich folgende Form der Differentialgleichung:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\,p}{\mathrm{d}\,v} - \frac{g^2-(W_T+p)^2}{p\cdot v}\cdot(1+\varepsilon_g) + \frac{W_N}{p\cdot v}\cdot\sqrt{g^2-(W_T+p)^2}\\ - \left(\frac{\overline{W}_y}{g}\cdot W_T - \bar{g}_y\right)\frac{v}{p} + \left(\overline{W}_v - \frac{\overline{W}_y}{g}\cdot v\right) = 0\end{aligned}\right\} \qquad (15),$$

$$\frac{\mathrm{d}\,y}{\mathrm{d}\,v} = -\frac{v}{g}\cdot\left(\frac{W_T}{p}+1\right) \qquad (16).$$

Diese beiden simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung gelten vollkommen streng ohne jede Vernachlässigung für beliebige Flugbahnen des Geschosses. Man kann die Auflösung derselben wesentlich vereinfachen, wenn man die zusätzliche Abhängigkeit der Größen W_T und g von y bei dem Integrationsprozeß vernachlässigt, jedoch nach Ausführung der Integration in der ursprünglichen Form bestehen läßt, was ohne Beeinträchtigung der Genauigkeit für die praktisch in Betracht kommenden Flugbahnhöhen möglich ist. Dadurch kann man nach Lösung der ersten Differentialgleichung die Ordinate y durch eine einfache Quadratur als Funktion der Geschwindigkeit v erhalten:

$$y = \int_{v_0}^{v} \frac{v}{g}\cdot\left(\frac{W_T}{p}+1\right)\cdot\mathrm{d}\,v \qquad (17).$$

Ebenso gewinnt man dann die Zeit t durch eine einfache Quadratur:

$$t = \int_{v_0}^{v} \frac{\mathrm{d}\,v}{p} \qquad (18).$$

Um schließlich noch die x-Ordinate zu gewinnen, geht man am zweckmäßigsten von der Komponentengleichung aus:

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,t} = \frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,v}\cdot p = v\cdot\cos\vartheta = v\cdot\sqrt{1-\left(\frac{W_T+p}{g}\right)^2}\,;$$

oder

$$\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}\,v} = \frac{v}{g}\cdot\sqrt{\left(\frac{g}{p}\right)^2 - \left(\frac{W_T}{p}+1\right)^2} \qquad (19),$$

woraus wiederum x durch eine Quadratur zu erhalten ist:

$$x = \int_{v_0}^{v} \frac{v}{g}\cdot\sqrt{\left(\frac{g}{p}\right)^2 - \left(\frac{W_T}{p}+1\right)^2}\cdot\mathrm{d}\,v \qquad (20).$$

Alle diese Differentialgleichungen gelten streng für ein beliebiges Widerstandsgesetz:

$$W_T(v,y) = c\cdot\delta(y)\,v^2\cdot K(v,y)\,.$$

Will man jedoch die Auflösungen vorstehender Differentialgleichungen vollständig streng ohne die oben gekennzeichnete Vernachlässigung der zusätzlichen Höhenabhängigkeit von W_T und g durchführen, so muß man aus der zweiten Differentialgleichung (16) für $\bar{y} = \mathrm{d}\,y : \mathrm{d}\,v$ den Wert von p ausrechnen, was ohne Schwierigkeiten möglich ist, da diese Gleichung in p linear ist, den gewonnenen Wert von p nochmals nach v differentiieren und die beiden so erhaltenen Ausdrücke für p und $\mathrm{d}\,p : \mathrm{d}\,v$ in die erste Differentialgleichung (15) einführen, wodurch diese in eine Differentialgleichung übergeht, die ausschließlich die Variablen y und v enthält. Hat man daraus dann y als Funktion von v gewonnen, so kann man aus der zweiten Differentialgleichung für y durch einfache Substitution der gewonnenen Funktion $y(v)$ auch die Funktion $p(v)$ erhalten, so daß die Ermittlung der weiteren Ordinaten in der oben gekennzeichneten Form durch Quadraturen völlig allgemein und streng durchgeführt werden kann.

§ 3. Vereinfachung und Umformung der Hauptgleichung.

Da nun für eine Festlegung der Normalkomponente W_N des Luftwiderstandes noch jede Grundlage fehlt, setzen wir zunächst in gebräuchlicher Weise in unserer neuen ballistischen Hauptgleichung $W_N = 0$. Wir setzen also damit voraus, daß die Symmetrieachse der Geschoßform mit der Bahntangente stets zusammenfällt. Weiterhin kann man die neben der Einheit kleine Größe:

$$\varepsilon_g = -v^2 \cdot \frac{g : R}{2}$$

stets durch einen konstanten Mittelwert ersetzen. Wir schreiben dann die Gl. (15) in folgender Form:

$$\frac{d p}{d v} + \frac{1+\varepsilon_g}{v} \cdot p - \frac{(g^2 - W_T^2)\frac{1+\varepsilon_g}{v^2} + \left(\frac{\overline{W}_y}{g} \cdot W_T - \bar{g}_y\right) \cdot v}{p} + 2 \cdot \frac{1+\varepsilon_g}{v} \cdot W_T + \overline{W}_v - \frac{\overline{W}_y}{g} \cdot v = 0 \quad (21).$$

Die Differentialgleichung hat somit die allgemeine Form:

$$y' + f_1(x) \cdot y + f_2(x) \cdot y^{-1} + f_3(x) = 0.$$

Diese Gleichung würde ohne das von y freie Glied eine Bernoullische Differentialgleichung sein mit $n = -1$, sie wäre also in $y^{-2} : 2$ linear. Wir formen daher unsere Differentialgleichung in folgender Weise durch Einführung neuer Variablen um, indem wir setzen:

$$(1+\varepsilon_g) \cdot \frac{d v}{v} = d u; \quad v = v_0 \cdot e^{\frac{u}{1+\varepsilon_g}}; \quad \frac{1}{2} p^2 = \eta; \quad d\eta = p \cdot d p.$$

Streng würde gelten:

$$u = \ln \frac{v}{v_0} - \frac{v^2 - v_0^2}{R \cdot g}.$$

Damit läßt sich schreiben, wenn wir obige Gleichung mit $\frac{1+\varepsilon_g}{p \cdot v}$ dividieren:

$$\frac{d\eta}{d u} + 2\eta + \left[2 W_T + \frac{\overline{W}_v \cdot v - \overline{W}_y \cdot \frac{v^2}{g}}{1+\varepsilon_g}\right] \cdot \sqrt{2\eta} - g^2 + W_T^2 - \left(\overline{W}_y \cdot \frac{W_T}{g} - \bar{g}_y\right) \cdot \frac{v^2}{1+\varepsilon_g} = 0 \quad (22).$$

Mit:

$$v = v_0 \cdot e^{\frac{u}{1+\varepsilon_g}}; \quad \frac{d W_T}{d v} = \frac{d W_T}{d u} \cdot (1+\varepsilon_g) \cdot \frac{e^{-\frac{u}{1+\varepsilon_g}}}{v_0}$$

wird also:

$$\frac{\overline{W}_v \cdot v}{1+\varepsilon_g} = \overline{W}_u;$$

somit endgültig:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d\eta}{d u} + 2\eta + \left[2 W_T + \overline{W}_u - \overline{W}_y \cdot \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{e^{2\frac{u}{1+\varepsilon_g}}}{1+\varepsilon_g}\right] \cdot \sqrt{2\eta} - g^2 + W_T^2 \\ &\quad - \left(\frac{\overline{W}_y}{g} \cdot W_T - \bar{g}_y\right) \cdot \frac{v_0^2}{1+\varepsilon_g} \cdot e^{2\frac{u}{1+\varepsilon_g}} = 0 \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (23).$$

Dadurch ist η als Funktion von u bestimmt und durch die Substitution:

$$p = \sqrt{2\eta}; \quad u = (1+\varepsilon_g) \cdot \ln \frac{v}{v_0}$$

somit auch p als Funktion von u und von v.

Wir können nun aber noch einen anderen schönen Weg zur Umformung unserer neuen Hauptgleichung einschlagen. Wir gehen dazu auf die obige allgemeine Form (14) derselben zurück und führen folgende Substitution ein:

$$(p + W_T) : g = z \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (24).$$

Man überzeugt sich dann leicht, daß in sehr einfacher Weise ganz streng und allgemein:

$$p \cdot \bar{p} + \overline{W}_a = g \cdot (g z + W_T) \cdot \bar{z} + \bar{g}_y \cdot v \cdot (1 - z^2)$$

wird. Somit erhält man folgende außerordentlich einfache Form der Hodographengleichung in den Variablen z und v:

$$\left.\begin{aligned} &-(gz+W_T)\cdot\bar{z}+\left[\frac{1+\varepsilon_g}{v}\cdot g-\bar{g}_y\cdot\frac{v}{g}\right]\cdot(1-z^2)=\frac{W_N}{v}\cdot\sqrt{1-z^2}\,; \\ &(1+\varepsilon_g)\cdot g-\bar{g}_y\cdot\frac{v^2}{g}\equiv g \end{aligned}\right\} \quad \ldots\ldots (25).$$

Schließlich können wir noch statt der Variablen v wiederum den $\ln v = u$ als unabhängige Variable einführen, wodurch sich die Form unserer Differentialgleichung noch weiterhin vereinfacht:

$$\boxed{-(gz+W_T)\cdot\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}+g\cdot(1-z^2)=W_N\cdot\sqrt{1-z^2}} \quad \ldots\ldots (26).$$

Diese sehr einfache und übersichtliche Form der Hodographengleichung gilt also vollkommen streng ohne jede Vernachlässigung auch unter Berücksichtigung der Höhenabhängigkeit von Luftwiderstand und Erdschwere nach einem beliebigen vorgegebenen Gesetz, trotzdem die partiellen Ableitungen des Widerstandes W_T nach y nicht explizit in der Gleichung auftreten.

Als zweite Gleichung tritt hinzu eine Differentialgleichung für y:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v}=\frac{v}{p}\cdot z\,;\quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}=-v_0^2\cdot\frac{z}{gz+W_T}\cdot e^{2u} \quad \ldots\ldots (27).$$

Wie man dieses System simultaner Differentialgleichungen in den Variablen z, u und y ganz allgemein auflösen kann, wurde bereits oben im Anschluß an die Formen (15) und (16) der ballistischen Hauptgleichung dargelegt und ist ohne weiteres auf die vorstehenden Differentialgleichungen sinngemäß zu übertragen, wobei W_T und g vorgegebene beliebige Funktionen der Variablen y und u sind.

Da die ausschließlich und allgemein in der Ballistik gebräuchlichen Methoden zur Ermittlung des Luftwiderstandes W_T aus den erschossenen Flugbahnpunkten irgendeine Normalkomponente W_N vollkommen vernachlässigen, obschon diese auch bei drallstabilisierten Geschossen zumal bei größeren Abgangswinkeln erheblichere Werte erreichen kann, vor allem auch im Anfang der Flugbahn, so müssen die auf diesem Wege erhaltenen Widerstandsfunktionen W_T bzw. $K(v)$ von den realen Gesetzmäßigkeiten für den tangentialen Widerstandsvektor mehr oder weniger abweichen und können somit keine zuverlässige Grundlage für die Aufstellung eines Naturgesetzes über den Luftwiderstand als Funktion der Geschwindigkeit abgeben. Nach meinen Erfahrungen zeigen auch die experimentellen Flugbahnbilder der Geschosse ganz besonders zu Beginn erheblich unregelmäßige Widerstandsfunktionen infolge der zunächst noch stärkeren Pendelung des Geschosses, wenn dieses das Geschützrohr verlassen hat. Dabei kann man sogar ganz einwandfrei feststellen, daß eine wesentliche Normalkomponente W_N des Luftwiderstandes vorhanden war, da die ersten Flugbahnpunkte oft größere Höhenwerte y besitzen, als dem Abgangswinkel (ϑ_0) selbst ohne Tangentialkomponente des Widerstandes entsprechen können, indem nämlich ganz deutlich und einwandfrei für die ersten Flugbahnpunkte $y \geqq x\cdot\operatorname{tg}\vartheta_0$ ist.

Aus der zweiten unserer Ausgangsgleichung (1^x) ersieht man sofort, daß unsere Substitutionsvariable z nichts anderes wie der Sinus des Tangentenwinkels ϑ ist: $\sin\vartheta = z$.

Man kann daher die obige wichtige Form der ballistischen Hauptgleichung auch unmittelbar aus den beiden Ausgangsgleichungen (1) und (2) für die tangentiale und normale Beschleunigungskomponente des Geschosses auf folgendem Wege gewinnen:

Wir multiplizieren die zweite dieser Gl. (2) mit $\cos\vartheta$ und erhalten so:

$$v\cdot\cos\vartheta\cdot\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t}=-g\cdot\cos^2\vartheta+W_N\cdot\cos\vartheta\,,$$

worin noch:

$$\cos\vartheta\cdot\mathrm{d}\vartheta=\mathrm{d}(\sin\vartheta)=\mathrm{d}z\,;\qquad \cos\vartheta=\sqrt{1-z^2}$$

ist. Aus der ersten Ausgangsgleichung (1) ergibt sich aber:

$$\mathrm{d}t=-\frac{\mathrm{d}v}{g\cdot\sin\vartheta+W_T}=-\frac{\mathrm{d}v}{g\cdot z+W_T} \quad \ldots\ldots (28).$$

Dieses in die vorstehende Gleichung eingesetzt unter Berücksichtigung von: $\mathrm{d}v/v=\mathrm{d}u$ ergibt sofort unsere obige einfache und doch völlig allgemeine ballistische Hauptgleichung (26).

Setzen wir insbesondere wiederum $W_N = 0$, lassen also die Symmetrieachse der Geschoßform auf dem ganzen Flugbahnwege mit der Bahntangente zusammenfallen, so nimmt unsere Hodographengleichung in völliger Allgemeinheit folgende Form an:

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}=\frac{1-z^2}{z+W_T:g},$$

worin:

$$W_T=c\cdot\delta(y)\cdot f(v,y)=c\cdot\delta(y)\cdot v^2\cdot K(v,y),$$

$c=$ ballistischer Beiwert, $\delta=$ Luftdichte und $K(v)=$ ballistische Beiwertsfunktion ist.

Diese Gleichung ist mit der bekannten Form der Hodographengleichung, wie man sie in den ballistischen Lehrbüchern findet, identisch.

Als zweite Bestimmungsgleichung tritt hinzu:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{v_0^2}\cdot\left[\frac{W_T}{z}+g\right]\cdot e^{-2u};\quad z(u)=-\frac{W_T}{g+v_0^2\cdot e^{2u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}},$$

wobei W_T und g beliebig vorgegebene Funktionen der Variablen $u=\ln v$ und y sein können. Weiterhin kommen dann noch folgende gleichfalls ganz allgemeine und sehr einfache Bestimmungsgleichungen für die einzelnen Bahnelemente hinzu:

$$\left.\begin{array}{ll} p=-(gz+W_T); & \mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}v}{p(v)}=v_0\cdot\frac{e^u}{p(u)}\cdot\mathrm{d}u; \\ \mathrm{d}x=v\cdot\sqrt{1-z^2}\cdot\frac{\mathrm{d}v}{p}; & \vartheta=\arcsin z \end{array}\right\}\quad\ldots\ldots\ldots\quad(29).$$

Damit sind sämtliche Bestimmungsstücke der Flugbahn streng durch sehr einfache Ausdrücke dargestellt.

Die obige Form der Hodographengleichung unter Berücksichtigung einer Normalkomponente:

$$\left(z+\frac{W_T}{g}\right)\cdot\mathrm{d}z+\left[\frac{W_N}{g}\cdot\sqrt{1-z^2}-(1-z^2)\right]\cdot\mathrm{d}u=0$$

legt den Gedanken nahe, einen integrierenden Faktor zu suchen, der diesen Ausdruck in ein vollständiges Differential verwandelt, so daß dadurch die allgemeine Integration sofort durchführbar wäre. Diese Aufgabe muß z. Zt. einer späteren ballistischen Forschung überlassen werden.

Interessant ist jedoch noch folgende Bemerkung: Die obige Differentialgleichung (16) für y, die sofort auf eine Quadratur führt, stellt den Wert y als Differenz in der folgenden Form dar:

$$y=-\int_{v_0}^{v}\frac{v}{g}\cdot\left[\frac{W_T}{p(v)}+1\right]\cdot\mathrm{d}v=\frac{v_0^2-v^2}{2g}-\int_{v_0}^{v}\frac{v}{g}\cdot\frac{W_T}{p(v)}\cdot\mathrm{d}v\quad\ldots\ldots\quad(30).$$

Der erste Summand der rechten Seite dieser Gleichung ist dabei genau der Wert der Höhenordinate y für den luftleeren Raum:

$$y_{\text{Vac.}}=(v_0^2-v^2):2g.$$

Unsere Theorie ergibt also die y-Ordinate der Flugbahnpunkte in aller Strenge und Allgemeinheit durch eine Korrekturrechnung aus den Werten für den luftleeren Raum in einer gwissen Analogie und Fortsetzung zu dem bekannten Angelrutenprinzip für die Konstruktion der Flugbahnparabel im luftleeren Raum.

Der Scheitelpunkt der Flugbahn wird insbesondere für $z=0$, der Schnittpunkt mit der x-Achse für $y=0$, also für

$$\int_{v_0}^{v}\frac{v}{g}\cdot\frac{W_T}{p}\cdot\mathrm{d}v=\frac{v_0^2-v^2}{2g}$$

erhalten.

§ 4. Ermittlung der Widerstandskomponenten W_T und W_N.

Unsere neue Hauptgleichung kann vor allem auch dazu dienen, um in einfachster Weise die Flugbahn zonenweise zu berechnen, indem man von Punkt zu Punkt der Kurve intervallweise den Wert der Widerstandskomponenten W_T und W_N konstant setzt. In umgekehrter Reihenfolge stellt dasselbe Verfahren eine Methode zur einfachen und genauen Bestimmung der Widerstandsfunktion aus den erschossenen Flugbahnpunkten dar.

Wir vereinfachen zunächst die Schreibweise unserer beiden Hauptgleichungen noch dadurch, daß wir setzen:

$$\frac{W_T}{g}=T;\quad\frac{W_N}{g}=N\quad\ldots\ldots\ldots\ldots\quad(31),$$

wobei T und N dimensionslose Größen werden. Wir bezeichnen im folgenden diese Größen T und N als „relative" Widerstandskomponenten. Damit nehmen dann die Gl. (26) und (27) die Form an:

$$(z+T)\cdot\frac{dz}{du}-(1-z^2)+N\cdot\sqrt{1-z^2}=0 \qquad (32),$$

$$\frac{dy}{du}=-\frac{v_0^2}{g}\cdot\frac{z}{z+T}\cdot e^{2u}; \qquad \frac{dy}{d(v^2)}=-\frac{1}{2g}\cdot\frac{z}{z+T} \qquad (33).$$

Die sehr einfache Form der zweiten der Gl. (33) weist darauf hin, daß es zweckmäßig sein wird, zur Bestimmung der Flugbahnordinaten als unabhängige Variable das Quadrat (v^2) der Geschoßgeschwindigkeit zu wählen. Aus dieser Gleichung ergibt sich sofort der Wert T der relativen, tangentialen Widerstandskomponente:

$$T=-\left(1+\frac{1}{2g}\cdot\frac{d(v^2)}{dy}\right)\cdot z \qquad (34).$$

Sind nun die Flugbahnordinaten x, y und t durch photogrammetrische Flugbahnvermessung am geeignetsten mittels zerhackter Leuchtspur gegeben, so gelten die Beziehungen:

$$z=\sin\vartheta=\frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta^2 x+\Delta^2 y}}; \qquad v^2=\frac{\Delta^2 x+\Delta^2 y}{\Delta^2 t} \qquad (35).$$

Man bildet also zweckmäßig für das elementare Zeitintervall Δt der Vermessungspunkte aus den zugehörigen ersten Differenzen Δx und Δy nach vorstehenden Gleichungen die z- und v^2-Werte und gleicht sie graphisch mit den Werten der y-Ordinaten aus. Der so durch eine Kurve festgelegte funktionale Zusammenhang zwischen z und v^2 einerseits und y und v^2 andererseits wird dann dazu benutzt, um nach Gl. (34) die relativen Werte T der tangentialen Widerstandskomponente nach bekannter Methode zu berechnen. Die gewonnenen T-Werte kann man nochmals graphisch ausgleichen und erhält dadurch unmittelbar die relative Widerstandsfunktion T in Abhängigkeit von dem Quadrat v^2 der Geschoßgeschwindigkeit.

Nachdem so der T-Wert ermittelt ist, wird man die erste Hauptgleichung (32) dazu verwenden, um den relativen Wert N der normalen Widerstandskomponente zu berechnen. Es ergibt sich unmittelbar aus Gl. (32):

$$N=\sqrt{1-z^2}-\frac{z+T}{\sqrt{1-z^2}}\cdot\frac{dz}{du} \qquad (36),$$

wobei man die elementaren Differenzen Δu aus der Beziehung:

$$\Delta u=\ln v_1-\ln v_2=\frac{1}{2}\cdot[\ln(\Delta^2 x_1+\Delta^2 y_1)-\ln(\Delta^2 x_2+\Delta^2 y_2)] \qquad (37)$$

gewinnt. Es lassen sich also auch die N-Werte unmittelbar auf Grund des nach vorstehend beschriebener Methode experimentell ermittelten funktionalen Zusammenhanges zwischen z und v^2 berechnen.

Fällt die Symmetrieachse der Geschoßform mit der Bahntangente zusammen, so muß sich aus dieser Gleichung der Wert $N=0$ ergeben. Daher läßt sich dann T auch aus dieser Gl. (33) unmittelbar berechnen:

$$T_{N=0}=(1-z^2)\cdot\frac{du}{dz}-z=-\left(1+\frac{1}{2g}\cdot\frac{d(v^2)}{dy}\right)\cdot z \qquad (38).$$

Da der Normalkomponente im allgemeinen, solange $N\leqq 1$ ist, nur eine virtuelle und keine reelle Verschiebung in ihrer Richtung entspricht, so kann N ausschließlich eine Funktion des Anstellwinkels der Symmetrieachse des Geschosses sein. Wenn also einmal die rein mathematische Theorie entwickelt sein wird, welche die Abhängigkeit zwischen N und α festlegt, so kann man damit nach vorstehender Methode aus den experimentell ermittelten N-Werten auch die Anstellwinkel α des Geschosses in jedem Flugbahnpunkt genau festlegen.

Die Größe, die in der Aerodynamik schlechthin als Auftrieb bezeichnet wird, ist die in der Ordinatenrichtung senkrecht nach oben, also entgegengesetzt der Erdbeschleunigung, wirkende Kraftkomponente. Diese ist aus unserer Normalkomponente W_N durch Multiplikation mit $\cos\vartheta$ zu erhalten und also durch die Größe $W_N\cdot\cos\vartheta$ gegeben. Da $\cos\vartheta$ eine

Funktion der Geschwindigkeit v ist, wird somit der aerodynamische Auftrieb eine Funktion der Geschwindigkeit und des Anstellwinkels. Die vorstehende Beziehung lehrt ferner, daß dieser Auftrieb sich als das Produkt zweier Funktionen darstellen läßt, von denen die eine nur vom Anstellwinkel α und die andere von der Geschwindigkeit (v) abhängt.

§ 5. Ermittlung der Geschoßbahn durch eine neue mechanische Integriermaschine.

Wir leiten noch einige wichtige und interessante Beziehungen für die Ordinaten der Flugbahn ab, indem wir das Geschwindigkeitsquadrat (v^2) als unabhängige Variable einführen. Aus unserer Ausgangsgleichung (1):

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -W_T - g \cdot \sin\vartheta = -g \cdot (T + z)$$

gewinnen wir wie oben das Zeitdifferential:

$$\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}v}{g \cdot (T + z)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (28).$$

Dann lassen sich die beiden Geschwindigkeitskomponenten in den Ordinatenrichtungen in folgender Weise umformen:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = v \cdot \cos\vartheta = v \cdot \sqrt{1 - z^2}; \quad \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}v} = -\frac{v}{g} \cdot \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z + T} \quad \ldots \ldots \quad (39);$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v \cdot \sin\vartheta = v \cdot z; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}v} = -\frac{v}{g} \cdot \frac{z}{z + T} \quad \ldots \ldots \quad (40).$$

Da aber: $v \cdot \mathrm{d}v = \frac{1}{2}\mathrm{d}(v^2)$ ist, so folgt weiterhin:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}(v^2)} = -\frac{1}{2g} \cdot \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z + T}; \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}(v^2)} = -\frac{1}{2g} \cdot \frac{z}{z + T};} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{z}{\sqrt{1 - z^2}} \quad \ldots \quad (41).$$

Die letzte dieser beiden Gleichungen ist mit Gl. (33) identisch. Wir setzen nun zur Vereinfachung der Schreibweise:

$$2g \cdot \mathrm{d}x = \mathrm{d}\bar{x}; \quad 2g \cdot \mathrm{d}y = \mathrm{d}\bar{y}$$

und können dann schreiben:

$$\frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}(v^2)} = -\frac{\sqrt{1 - z^2}}{z + T}; \quad \frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}(v^2)} = -\frac{z}{z + T}; \quad \frac{\mathrm{d}(v^2)}{\mathrm{d}\bar{y}} = -\left(1 + \frac{T}{z}\right) \quad \ldots \quad (42).$$

In analoger Weise formen wir die ballistische Hauptgleichung (32) um, indem wir beachten, daß: $\mathrm{d}u = \mathrm{d}v : v = \mathrm{d}(v^2) : 2v^2$ ist:

$$2v^2 \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}(v^2)} - \frac{1 - z^2}{z + T} + N \cdot \frac{\sqrt{1 - z^2}}{z + T} = 0.$$

Durch Einführung der Gl. (42) in den vorstehenden Ausdruck ergibt sich dann endgültig folgende wichtige Beziehung:

$$\boxed{2v^2 \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}(v^2)} - N \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\mathrm{d}(v^2)} + \frac{1 - z^2}{z} \cdot \frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\mathrm{d}(v^2)} = 0} \quad \ldots \ldots \quad (43).$$

Die Gl. (42) und (43) können dazu dienen, um in einfacher Weise durch mechanische Integration mittels der von der Firma Askania in Berlin auf meine Veranlassung unter maßgeblicher Mitwirkung von R. Sauer[3]), Aachen gebauten Integriermaschine mit Hilfe der Variablen: v^2, x, y und $z = \sin\vartheta$ die Geschoßflugbahn unmittelbar aufzuzeichnen. Zu diesem Zweck formen wir die genannten Gleichungen in folgender Weise um:

[3]) Vgl. R. Sauer und H. Pösch: Integriermaschine für gewöhnliche Differentialgleichungen. Z. VDI Bd. 87 (1943), S. 221.

$$v^2 = -2\left[\int g\,\mathrm{d}y + \int \frac{W_T}{z}\cdot \mathrm{d}y\right] \quad \ldots \quad (44_1);$$

$$x = \int \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\,\mathrm{d}y \quad \ldots \quad (44_2);$$

$$z = \int \frac{W_N}{v^2}\cdot \mathrm{d}x - \int \frac{g}{v^2}\cdot\frac{1-z^2}{z}\cdot \mathrm{d}y \quad \ldots \quad (44_3).$$

Darin wählt man zweckmäßig y als unabhängige Variable. Die ihm entsprechende Achse der Integriermaschine wird also unmittelbar und primär angetrieben. Man zeichnet dann x als Funktion von y mittels des Resultattriebes der Maschine auf. Desgleichen können mit weiteren Resultattrieben auch die Größen v^2 und z als Funktion von x unmittelbar aufgezeichnet werden. Die empirischen Widerstandsfunktionen $W_T(v^2)$ und $W_N : v^2$ werden durch Funktionstriebe in den Rechenvorgang eingeführt. Dabei ist aber Voraussetzung, daß die funktionalen Beziehungen:

$$\frac{W_T}{z};\quad \frac{\sqrt{1-z^2}}{z};\quad \frac{g}{v^2}\cdot\frac{1-z^2}{z}$$

durch Multiplikationstriebe gebildet werden.

Für die meisten praktischen Fälle wird man in den Gl. (44) die Erdbeschleunigung g wenigstens für den Integrationsvorgang konstant setzen können, so daß sich die Gleichungen durch folgende Schreibweise weiterhin vereinfachen lassen:

$$v^2 = -\left[\bar{y} + \int \frac{T}{z}\cdot \mathrm{d}\bar{y}\right];\quad \bar{y} = 2\,g\cdot y \quad \ldots \quad (45_1);$$

$$\bar{x} = \int \frac{\sqrt{1-z^2}}{z}\cdot \mathrm{d}\bar{y};\quad \bar{x} = 2\,g\cdot x \quad \ldots \quad (45_2);$$

$$2z = \int \frac{N}{v^2}\cdot \mathrm{d}\bar{x} - \int \frac{1}{v^2}\cdot\frac{1-z^2}{z}\cdot \mathrm{d}\bar{y} \quad \ldots \quad (45_3).$$

Unter der Voraussetzung von geeigneten Multiplikationstrieben benötigt man zur mechanischen Integration nach vorstehenden allgemeinen Gleichungen nur 4 Integrationstriebe, 2 Funktionstriebe und 2 bzw. 4 Additionstriebe. Die funktionalen Beziehungen:

$$\frac{1}{z};\quad \frac{\sqrt{1-z^2}}{z} = \sqrt{\left(\frac{1}{z}\right)^2 - 1};\quad \frac{1-z^2}{z} = \frac{1}{z} - z$$

kann man auch durch Kurven festlegen und mittels zusätzlicher Funktionstriebe in den Integrationsmechanismus einführen. Da zur Zeit brauchbare mechanische Multiplikatoren von der erforderlichen Genauigkeit nicht existieren, so kann man statt ihrer zusätzliche Integrationstriebe anwenden.

Da die vorstehenden Gl. (45) noch relativ komplizierte Funktionen unter den Integralzeichen enthalten, wollen wir noch einen anderen ebenso allgemeinen, dabei aber wesentlich einfacheren Weg zur mechanischen Integration der Flugbahngleichungen angeben. Wir gewinnen diesen Weg leicht dadurch, daß wir eine zusätzliche Hilfsvariable:

$$\mathrm{d}u = \frac{\mathrm{d}t}{v} \quad \ldots \quad (46)$$

in die Gl. (45) einführen und der Größe z ihre ursprüngliche Bedeutung als $\sin\vartheta$ geben. Wir können die erforderlichen funktionalen Beziehungen aber auch unmittelbar aus unserer Ausgangsgleichung (2) ableiten:

$$v\cdot\frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}t} = W_N - g\cdot\cos\vartheta,$$

worin wir unter Voraussetzung konstanter Erdbeschleunigung noch:

$$2g\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}\bar{t};\quad 2g\,t = \bar{t};\quad \mathrm{d}\bar{u} = \frac{\mathrm{d}\bar{t}}{2v}$$

schreiben können. Auf diese Weise erhalten wir:

$$\mathrm{d}\vartheta = \frac{g}{v}\cdot(N - \cos\vartheta)\cdot\mathrm{d}t = (N-\cos\vartheta)\cdot\mathrm{d}\bar{u} = (W_N - g\cdot\cos\vartheta)\cdot\mathrm{d}u \quad \ldots \quad (47).$$

Hinzu nehmen wir noch die elementaren Beziehungen für das Bogenelement $\mathrm{d}s$:

$$\mathrm{d}s = \frac{\mathrm{d}x}{\cos\vartheta} = \frac{\mathrm{d}y}{\sin\vartheta};\quad \mathrm{d}\bar{s} = \frac{\mathrm{d}\bar{x}}{\cos\vartheta} = \frac{\mathrm{d}\bar{y}}{\sin\vartheta} \quad \ldots \quad (48),$$

wenn $\bar{s} = 2g \cdot s$ ist. Endlich haben wir für die Geschwindigkeit (v) die Definitionsgleichung:

$$v = \frac{ds}{dt}; \quad ds = v \cdot dt = v^2 \cdot du; \quad d\bar{s} = v \cdot d\bar{t} = 2v^2 \cdot d\bar{u} \quad \ldots\ldots \quad (49).$$

Dadurch haben wir folgendes System äußerst einfacher und doch strenger und allgemeiner Gleichungen für den mechanischen Integrationsvorgang gewonnen.

$g = \text{const}$	$g = \text{variabel}$	
$\bar{s} = 2 \cdot \int v^2 d\bar{u}$;	$s = \int v^2 du$	(50_1);
$\vartheta = \int (N - \cos\vartheta) d\bar{u}$;	$\vartheta = \int (W_N - g \cdot \cos\vartheta) \cdot du$	(50_2);
$v^2 = -\bar{y} - \int T d\bar{s}$;	$v^2 = -2 \int g\, dy - 2 \int W_T \cdot ds$	(50_3);
$\bar{y} = \int \sin\vartheta \cdot d\bar{s}$;	$y = \int \sin\vartheta \cdot ds$	(50_4);
$\bar{x} = \int \cos\vartheta \cdot d\bar{s}$;	$x = \int \cos\vartheta \cdot ds$	(50_5).

Als primäre Variable und unmittelbare Antriebachse der Maschine wählen wir die Größe u. Die Funktionen $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)$ können wir durch eine Kurve mittels eines Funktionstriebes in den Integrationsmechanismus einführen. Da $\cos\vartheta$ aus $\sin\vartheta$ durch eine Phasenverschiebung um $\frac{\pi}{2}$ hervorgeht, so genügt an sich eine Sinus-Kurve, die durch einen Funktionstrieb mit doppelter Abtastung mit einer Verschiebung von $\vartheta_a = \frac{\pi}{2}$ eingeführt wird. Durch 3 Resultattriebe werden v^2, y und x als Funktionen von u aufgezeichnet. Die Kurve $v^2(u)$ wird sodann durch rechnerische Radizierung in die Kurve $v(u)$ umgezeichnet. Diese Kurve wird in einem zweiten Integrationsvorgang mit nur einem Integrationstrieb dazu verwandt, um die Zeitvariable t als Funktion von u aufzuzeichnen gemäß der Beziehung:

$$\bar{t} = 2 \cdot \int v \cdot d\bar{u}; \quad t = \int v \cdot du \quad \ldots\ldots \quad (51).$$

Da in Gl. (50_2) für ϑ auch in der rechten Kolonne die Erdbeschleunigung g in dem Ausdruck $g \cdot \cos\vartheta$ neben W_N unbedenklich für fast alle praktischen Fälle konstant gesetzt, sowie in Gl. (50_3) für v^2 das Integral $\int g \cdot dy$ rechnerisch streng ausgewertet werden kann, wenn g nur Funktion von y ist, so benötigt man zur Durchführung der mechanischen Integration insgesamt 5 Integrationstriebe, außerdem 2 Additionstriebe und 4 bzw. 6 Funktionstriebe, je 2 für die empirischen Funktionen $T(v^2)$ und $N(v^2)$ bzw. $W_T(v^2)$ und $W_N(v^2)$ und die theoretisch gegebenen Funktionen $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ bzw. für die Funktionen $g \cdot \cos\vartheta$ und $2 \cdot \int g \cdot dy$.

Will man den Integrationsprozeß auch für variables g streng durchführen, so muß man die Gl. (50_2) in folgender Weise zerlegen:

$$\vartheta = \int W_N \cdot du - \int \cos\vartheta\, d\bar{u},$$

$$\bar{u} = \int g \cdot du.$$

Man benötigt also 2 zusätzliche Integrationstriebe. Überdies kann man auch die Funktionen $\sin\vartheta$ und $\cos\vartheta$ durch einen Integrationsmechanismus gewinnen, zu dem man nochmals zwei zusätzliche Integrationstriebe benötigen würde. Um schließlich die Höhenabhängigkeit der Widerstandsfunktion W_T entsprechend dem Ansatz:

$$W_T(v^2, y) = W_1(y) \cdot W_2(v^2)$$

zu berücksichtigen, ist noch eine Zerlegung des Integrals in Gl. (50_3) erforderlich:

$$\int W_T \cdot ds = \int W_2(v^2)\, dw; \quad w = \int W_1(y) \cdot ds.$$

Dadurch würde sich dann die Gesamtzahl der Integrationstriebe auf 10 erhöhen, zu denen 2 Additionstriebe sowie 4 Funktionstriebe für die Funktionen:

$$W_N(v^2); \quad W_1(y); \quad W_2(v^2); \quad g(y)$$

treten. Setzt man aber in der bisher üblichen Weise die normale Widerstandskomponente $N = 0$, so reduzieren sich die erforderlichen Hilfstriebe für konstante Erdbeschleunigung auf

einen Additionstrieb und 3 Funktionstriebe. Aus den aufgezeichneten Kurven für $\bar{y}$, $\bar{x}$ und $\bar{t}$ gewinnt man die Raum-Zeitkoordinaten y, x und t durch Division mit der doppelten Erdbeschleunigung entsprechend den Gleichungen:

$$y=\frac{1}{2g}\cdot\bar{y}; \quad x=\frac{1}{2g}\cdot\bar{x}; \quad t=\frac{1}{2g}\cdot\bar{t}.$$

Dabei kann noch der jeweilige Wert von g entsprechend seiner Höhenabhängigkeit so-

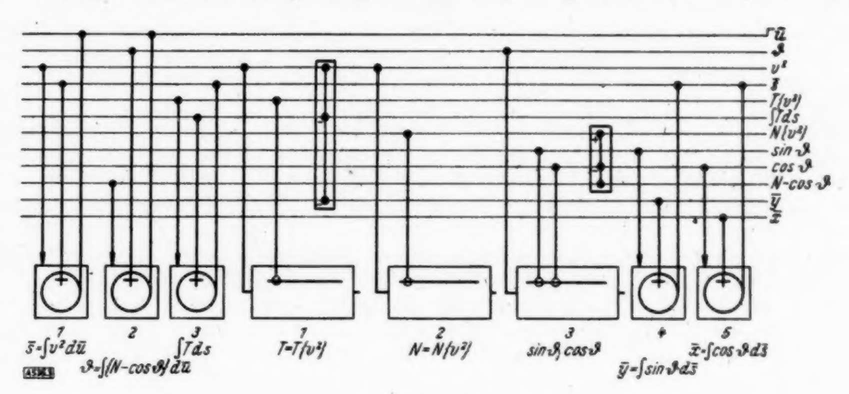


Bild 3.

wie bei Fernbahnen auch gemäß seiner Änderung mit der geographischen Breite gewählt werden. Damit sind dann sämtliche Variablen x, y, v sowie auch ϑ und s als Funktion der Zeit t graphisch ermittelt.

Die Bilder 3 und 4 zeigen die zu dem mechanischen Integrationsvorgang gemäß den Gl. (50_1) bis (50_5) und (51) gehörigen Schaltungsskizzen der Integriermaschine. Die Resultattriebe sind darin fortgelassen. Sie können beliebig an je 2 Achsen angeschlossen werden. 536

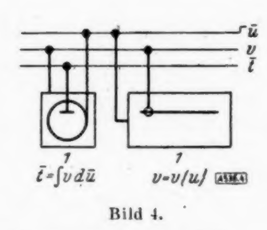


Bild 4.

Eingegangen am 28. 3. 1944.

Zur Theorie der Integriermaschine für gewöhnliche Differentialgleichungen.

(Mitteilung aus dem Institut für Praktische Mathematik der Technischen Hochschule Aachen.)

Von *R. Sauer* und *H. Pösch* in Aachen.

Für die auf dem Bush-Prinzip beruhende neue Askania-Integriermaschine wird die Frage nach dem Wirkungsbereich durch Aufzeigung der sämtlichen mit dem Gerät lösbaren Differentialgleichungen vollständig beantwortet und eine Klassifikation der Schaltungen gegeben.

§ 1. Einleitung.

Zur automatischen Lösung von Systemen gewöhnlicher Differentialgleichungen wurde in Anknüpfung an die amerikanische Bush-Maschine [1]) vor kurzem ein neues Universal-Integriergerät von den Askania-Werken in Berlin gebaut. Über die zahlreichen Anwendungsmöglichkeiten des Geräts in Mathematik und Technik und über die praktischen Fragen der Handhabung ist bereits an anderer Stelle [2]) berichtet worden und soll demnächst eine zusammenfassende Darstellung von H. Pösch erscheinen. Demgegenüber stehen in der vorliegenden Untersuchung theoretische Gesichtspunkte im Vordergrund und zwar insbesondere

[1]) V. Bush: The differential analyzer — A new machine for solving differential equations. J. Franklin Inst. Bd. 212 (1931), S. 447/88. — S. Rosseland: Mechanische Integration von Differentialgleichungen. Naturwiss. Bd. 27 (1939), S. 729/35. — A. Walther: Neuzeitliche mathematische Maschinen. Elektrotechn. Z. Bd. 61 (1940), S. 33/36. — W. Meyer zur Capellen: Mathematische Instrumente. Leipzig 1941, S. 205/209.

[2]) R. Sauer und H. Pösch: Integriermaschine für gewöhnliche Differentialgleichungen. Z. VDI Bd. 87 (1943), S. 221/224.

die Frage nach dem Wirkungsbereich der Integriermaschine. Sie wird durch Aufzeigung der sämtlichen mit dem Gerät lösbaren Differentialgleichungen vollständig beantwortet (§ 6). Vorher wird eine Prinziperläuterung des Gerätes (§ 2) und nach Einführung von Schaltplänen (§ 3) und Kraftflußplänen (§ 4) eine Klassifikation der Schaltungen gegeben (§ 5). An einfachen Beispielen werden die Ausführungen verdeutlicht.

§ 2. Prinziperläuterung der Integriermaschine.

Die Integriermaschine ist nicht ein ein für allemal fest vorliegendes Gerät, sondern besteht aus gewissen Grundtrieben (Integraltrieben, Summentrieben und Funktionstrieben), die in beliebiger Anzahl vorgegeben sind und bei jedem zu lösenden System von Differentialgleichungen in bestimmter Weise verkoppelt werden müssen („Baukastenprinzip").

Die unabhängige Veränderliche x und die abhängigen Veränderlichen $y_1, y_2 \cdots, y_n$ werden dargestellt durch die Drehwinkel rotierender Achsen. Die x-Achse wird von außen durch einen Motor angetrieben und überträgt über die zwischengeschalteten Grundtriebe ihre Drehung zwangsläufig auf die übrigen Achsen derart, daß die Änderungen der Drehwinkel der sämtlichen miteinander verkoppelten Achsen gerade den vorgegebenen Differentialgleichungen entsprechen.

Auf die konstruktive Verwirklichung[2]) im einzelnen, insbesondere auf die Ausstattung mit elektrischen Fernübertragungs- und Verstärkersystemen, brauchen wir hier nicht näher einzugehen. Es genügt folgende Prinziperläuterung der Grundtriebe (Bild 1):

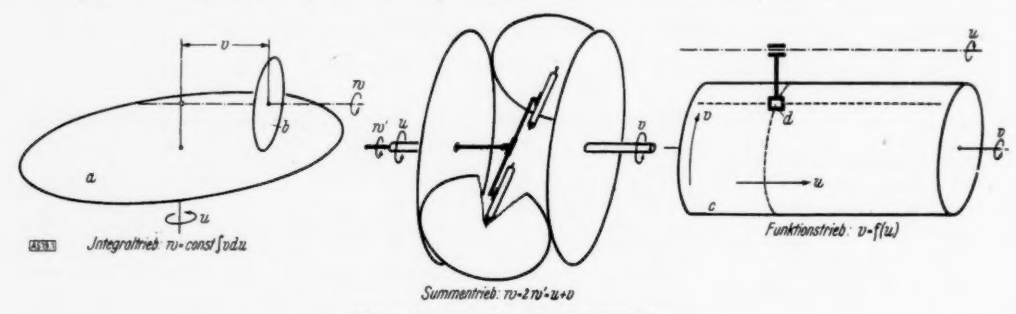


Bild 1. Prinzipskizze der Grundtriebe.

1. Integraltriebe.

Die Drehung einer Scheibe a überträgt sich auf ein scharfkantiges Reibrad b, so daß zwischen den Drehwinkeln u der Scheibe und w des Reibrads und dem Abstand v des Reibrads vom Scheibenmittelpunkt die Beziehung

$$d\,w = \text{const} \cdot v\, d\,u$$

besteht. Bei vorgegebener Drehung der Scheibe durch die u-Achse („Antrieb") und vorgegebener Verschiebung v des Reibrades über eine Spindel von der v-Achse aus („Eingang") ergibt sich für die w-Achse („Ausgang")

$$w = \text{const} \cdot \int v\, d\,u\,.$$

Die Anfangsbedingungen der zu lösenden Differentialgleichungen werden an den Eingängen der Integraltriebe eingestellt.

2. Summentriebe.

Sie übertragen nach Art eines Ausgleichgetriebes eines Kraftwagens die Summe oder Differenz der Drehwinkel zweier Achsen auf eine dritte Achse, liefern also die Summe oder Differenz

$$w = u \pm v\,.$$

3. Funktionstriebe.

Die v-Achse dreht die Trommel c, während die u-Achse über eine Spindel den Wagen d längs der Trommel verschiebt. Die eine der beiden Achsen wird aus dem Gerät heraus angetrieben („Eingang"). Die andere Achse („Ausgang") muß von Hand so nachgedreht werden, daß der mit Lupe ausgerüstete Wagen sich längs einer auf der Trommel vorgezeichneten Kurve bewegt. Die Drehwinkel der beiden Achsen sind dann durch die Beziehung

$$v = f(u)$$

verknüpft. Das Nachdrehen von Hand kann z. B. durch lichtelektrische Abtastung automatisiert werden.

Wenn man die Lupe durch eine Schreibvorrichtung ersetzt und beide Achsen aus dem Gerät heraus antreiben läßt, zeichnet der Wagen die Funktion $v = f(u)$ als Kurve auf. Auf diese Weise wird der Funktionstrieb zum Resultattrieb für die Entnahme der gesuchten Funktionen $y_i = f_i(x)$.

§ 3. Schaltpläne.

Bei Hinzunahme beliebiger Übersetzungen der Achsendrehungen und beliebiger Maßstabfaktoren der Drehwinkelmessung in den Veränderlichen x, y_i erhält man nach § 1 die Grundbeziehungen

$$\mathrm{d}w = k\,v\,\mathrm{d}u, \qquad w = k\int v\,\mathrm{d}u \quad \ldots \quad (1),$$

$$w = a\,u + b\,v \quad \ldots \quad (2),$$

$$v = f(u) \quad \ldots \quad (3)$$

für die drei Typen der Grundtriebe (Integraltriebe, Summentriebe, Funktionstriebe).

Das zu lösende Differentialgleichungssystem muß in n Grundbeziehungen (1), (2), (3) zwischen $(n+1)$ Veränderlichen $x, y_1, y_2, \ldots, y_n$ aufgespalten werden. Diesen n Grundbeziehungen sind dann ebenso viele Grundtriebe des Geräts zuzuordnen, durch welche die den $(n+1)$ Veränderlichen zugehörigen $(n+1)$ Achsen zwangsläufig verkoppelt werden.

Jedem lösbaren Differentialgleichungssystem entsprechen somit gewisse Schaltungen von $(n+1)$ Achsen über n Grundtriebe. Zur übersichtlichen Darstellung der Schaltungen kann man nach dem Vorgang von Bush Schaltpläne folgender Art verwenden, wobei für die Grundtriebe die in Bild 2 angegebenen Symbole treten:

1. Die $(n+1)$ Achsen werden als parallele waagrechte Linien übereinander gezeichnet mit Angabe der zugeordneten Veränderlichen x, y_i.
2. Darunter werden nebeneinander die Integraltriebe und Funktionstriebe gezeichnet, wobei die Eingangs-, Antriebs- und Ausgangsachsen als lotrechte Linien hinzukommen.
3. Hierauf verknüpft man die waagrechten und lotrechten Achsenlinien entsprechend den vorliegenden, aus dem Differentialgleichungssystem gewonnenen Integral- und Funktionsbeziehungen.
4. Zum Schluß werden die Summentriebe zur Verwirklichung der Summenbeziehungen hinzugefügt.

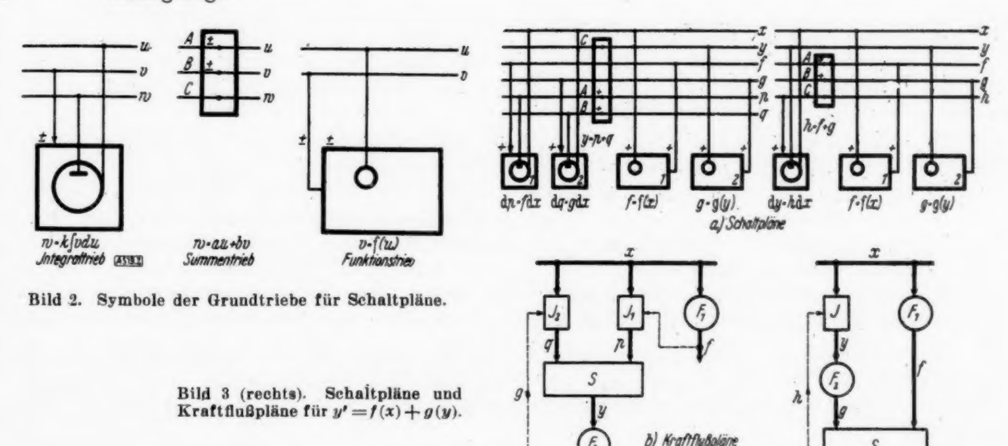


Bild 2. Symbole der Grundtriebe für Schaltpläne.

Bild 3 (rechts). Schaltpläne und Kraftflußpläne für $y' = f(x) + g(y)$.

Diese Schaltpläne zeigen unmittelbar, wie die einzelnen Grundtriebe miteinander verbunden werden müssen, und dienen daher als Anweisungen zur Einstellung der Schaltungen. Sie lassen sich auch auf eine Schalttafel übertragen, indem durch Bedienen von Schaltern oder Steckern waagrechte und lotrechte Achsen der Schalttafel gekoppelt werden.

Als Beispiel sind in Bild 3 unter (a) zwei Schaltpläne für die Differentialgleichung

$$y' = f(x) + g(y) \quad \ldots \quad (4)$$

angegeben. Beim linken Schaltplan ist (4) aufgespalten in

$$(J_1)\colon \mathrm{d}p = f\,\mathrm{d}x, \qquad (J_2)\colon \mathrm{d}q = g\,\mathrm{d}x,$$

$$(F_1)\colon \quad f = f(x), \qquad (F_2)\colon \quad g = g(y),$$

$$(S)\colon \; y = p + q,$$

beim rechten Schaltplan dagegen in

$$(J)\colon \mathrm{d}y = h\,\mathrm{d}x, \quad (F_1)\colon f = f(x), \quad (F_2)\colon g = g(y), \quad (S)\colon h = f + g.$$

Man sieht hieraus, daß einer Differentialgleichung mehrere Schaltungen entsprechen können, von denen bei der praktischen Anwendung des Gerätes die jeweils günstigste auszuwählen ist. Beim vorliegenden Beispiel ist der rechte Schaltplan der einfachere, da er einen Grundtrieb weniger als der linke enthält. Jedoch muß keineswegs stets die Schaltung mit der Mindestzahl von Grundtrieben die für die Praxis günstigste sein, sondern unter Umständen ist aus Maßstabs- oder technischen Gründen (z. B. Kraftverstärkung) eine andere Schaltung vorzuziehen.

§ 4. Kraftflußpläne.

Die Schaltpläne zeigen unmittelbar, in welcher Weise die Grundtriebe verkoppelt werden müssen. Ob jedoch die Schaltung richtig ist, d. h. ob tatsächlich jede Achse zwangsläufig und eindeutig angetrieben wird, kann erst durch Verfolgung des Kraftflusses von der x-Achse über die Grundtriebe zu allen übrigen Achsen festgestellt werden.

Der Kraftfluß läuft stets von den Antriebs- zu den Ausgangsachsen. Die Integraltriebe haben eine bestimmte Antriebs- und eine bestimmte Ausgangsachse. Die Antriebsachse treibt die Scheibe, die Ausgangsachse wird vom Reibrad getrieben, der Kraftfluß läuft also von der Scheibe zum Reibrad; eine Umkehrung des Kraftflusses könnte nur durch eine Anpressung des Reibrades erzwungen werden, die bei einem Präzisionsgerät naturgemäß unzulässig ist. Bei den Funktionstrieben kann der Kraftfluß sowohl von der Trommel zum Wagen laufen als auch umgekehrt, d. h. irgendeine der beiden Achsen wird aus dem Gerät heraus angetrieben und ist Antriebsachse, die andere Achse wird von Hand oder lichtelektrisch betätigt und ist Ausgangsachse. Bei Verwendung eines Funktionstriebs als Resultataufzeichner werden beide Achsen aus dem Gerät heraus angetrieben und sind Antriebsachsen. Ähnlich sind bei den Summentrieben irgendwelche zwei der drei Achsen Antriebsachsen, die restliche dritte Achse ist Ausgangsachse.

Die Eingangsachsen der Integraltriebe regeln die Verschiebung der Reibräder und beeinflussen hierbei den übrigen Kraftfluß nicht.

Um den Kraftfluß unmittelbar ersichtlich zu machen, kann man die Schaltpläne in Kraftflußpläne transformieren, wobei es sich empfiehlt, für die Grundtriebe die in Bild 4 angegebenen Symbole zu benützen. Die den Kraftfluß führenden Achsen (x-Achse, Antriebs- und Ausgangsachsen) werden durch dicke Linien mit Pfeilen in Kraftflußrichtung dargestellt, die nur der Regelung dienenden Eingangsachsen der Integraltriebe durch dünn gestrichelte, ebenfalls bepfeilte Linien. Im einzelnen erfolgt die Konstruktion der Kraftflußpläne folgendermaßen:

1. Zunächst wird die vom Motor angetriebene x-Achse als waagrechte Linie eingezeichnet.
2. Hierauf zeichnet man die an die x-Achse angeschlossenen Grundtriebe mit ihren Antriebs- und Ausgangsachsen ein und fügt Schritt für Schritt im Laufe des Kraftflusses über die Antriebs- und Ausgangsachsen die weiteren Grundtriebe hinzu. Dabei setzt man die hintereinander geschalteten Grundtriebe untereinander, die parallelgeschalteten nebeneinander.
3. Zum Schluß werden die der Regelung dienenden, den übrigen Kraftfluß nicht störenden Eingangsachsen der Integraltriebe durch dünn gestrichelte Linien dargestellt.

Die Schaltung ist in Ordnung, wenn der Kraftfluß durch alle Grundtriebe genau einmal hindurchläuft und die Eingangsachsen aller Integraltriebe geregelt werden. In Bild 3 sind unter (b) die den Schaltplänen (a) entsprechenden Kraftflußpläne der Differentialgleichung (4) angegeben.

Die hier zunächst für den praktischen Zweck der Verfolgung des Kraftflusses entwickelten Kraftflußpläne bilden ein sehr brauchbares Hilfsmittel auch für theoretische Untersuchungen. Mit ihrer Hilfe werden wir in den folgenden Abschnitten die Schaltungen klassifizieren und die Frage nach dem Wirkungsbereich der Integriermaschine, d. h. nach der Menge aller lösbaren Differentialgleichungssysteme, vollständig beantworten.

§ 5. Klassifikation der Schaltungen.

Die Schaltungen lassen sich klassifizieren nach der topologischen Struktur der Kraftflußpläne. Man erhält hierbei folgende Hauptklassen:

1. Reihenschaltungen.

Der Kraftfluß läuft in einem einzigen Zug durch alle Grundtriebe hindurch. Die Regelung der Eingänge der Integraltriebe erfolgt entweder aus dem vorangehenden Teil des Kraftflusses (Vorwärtskoppelung) oder aus dem nachfolgenden Teil (Rückkoppelung).

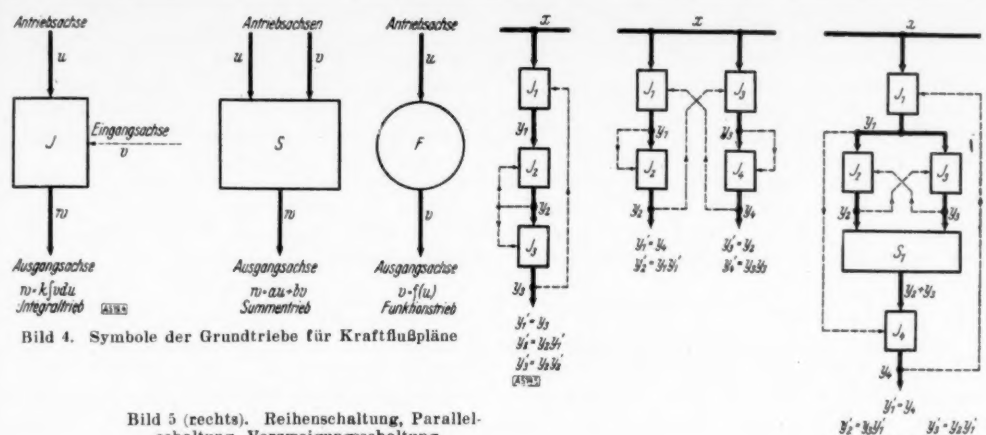


Bild 4. Symbole der Grundtriebe für Kraftflußpläne

Bild 5 (rechts). Reihenschaltung, Parallelschaltung, Verzweigungsschaltung.

2. Parallelschaltungen.

Der Kraftfluß gabelt sich an der x-Achse in mehrere parallele Zweige und durchläuft jeden dieser Zweige in Reihenschaltung. Die Eingänge der Integraltriebe werden entweder innerhalb der einzelnen Zweige geregelt (Vorwärts- bzw. Rückkoppelung) oder von einem Zweig zu einem anderen (Querkoppelung).

3. Verzweigungsschaltungen.

Im allgemeinen wird sich der Kraftfluß an mehreren Stellen gabeln und dadurch zu einer vielgestaltigen Verzweigung nach Art eines Stammbaumes führen. Hinsichtlich der Regelung der Eingänge der Integraltriebe kann man auch hier Vorwärts-, Rück- und Querkoppelungen unterscheiden.

In Bild 5 ist je ein Beispiel einer Reihenschaltung, einer Parallelschaltung und einer Verzweigungsschaltung angegeben.

Zu einer weiteren Unterteilung für jede der drei Hauptklassen kommt man durch die Unterscheidung in reduzible und irreduzible Schaltungen:

a) Irreduzible Schaltungen.

Eine Schaltung heißt irreduzibel, wenn kein einzelner Grundtrieb und kein Aggregat von Grundtrieben weggenommen werden kann, ohne daß der Kraftfluß oder die Regelung unterbrochen wird. Es ist also nicht möglich, einen Teil der Grundtriebe nach Abschaltung der anderen für sich allein laufen zu lassen.

b) Reduzible Schaltungen.

Eine Schaltung heißt reduzibel, wenn ein Grundtrieb oder ein Aggregat von Grundtrieben ohne Zerreißung des Kraftflusses oder der Regelung weggenommen werden kann. Eine reduzible Schaltung läßt sich demnach in Schaltungsteile folgender Art zerlegen: Ein oder mehrere Schaltungsteile werden von der x-Achse angetrieben und sind im Kraftfluß und in der Regelung von den anderen Teilen unabhängig, können also jeder einzeln für sich in Betrieb gesetzt werden. An diese Schaltungsteile sind die übrigen Schaltungsteile über einzelne Verbindungsachsen zur Kraftflußführung und zur Regelung angeschlossen. Sie lassen sich ebenfalls einzeln für sich in Betrieb setzen, falls man die Verbindungsachsen durch geeignete Funktionstriebe koppelt.

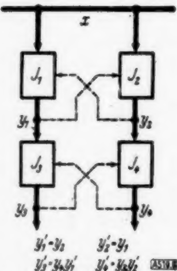


Bild 6. Reduzible Schaltung.

Bild 6 zeigt eine zweiteilige reduzible Schaltung. Der erste Schaltungsteil ist an die x-Achse angeschlossen und entspricht dem Differentialgleichungssystem

$$\frac{d y_1}{d x} = y_2, \quad \frac{d y_2}{d x} = y_1 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (5).$$

Der zweite Schaltungsteil ist über die y_1- und y_2-Achse als Verbindungsachsen an den ersten Teil angehängt und führt auf die Differentialgleichungen

$$\frac{d y_3}{d y_1} = y_4, \quad \frac{d y_4}{d y_2} = y_3 \quad \ldots \ldots \ldots \quad (6),$$

die sich nach Einsetzen der Lösungen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ von (5) integrieren lassen.

In reduziblen und in irreduziblen Schaltungen können Aggregate enthalten sein, die sich durch einen einzigen Funktionstrieb ersetzen lassen. In diesen Aggregaten kommt der Kraftfluß durch eine Verbindungsachse als Antriebsachse aus dem restlichen Schaltungsteil an und läuft in ihn durch eine weitere Verbindungsachse als Ausgangsachse zurück; außerdem erfolgt die Regelung aller Integraltriebeingänge innerhalb des Aggregats. Wir bezeichnen derartige, mit Funktionstrieben äquivalente Aggregate als Funktionsaggregate.

Naturgemäß entspricht jede irgendwie definierte Klasse von Schaltungen einer analogen Klasse von Differentialgleichungen. So sind beispielsweise den Schaltungen, in denen jeder Integraltrieb für sich allein oder zusammen mit einem Funktionstrieb ein Funktionsaggregat bildet, durch Quadraturen lösbare Differentialgleichungen zugeordnet.

§ 6. Wirkungsbereich der Integriermaschine.

Auf Grund der Kraftflußpläne kann man die Frage nach dem Wirkungsbereich der Integriermaschine durch Angabe aller lösbaren Differentialgleichungssysteme vollständig beantworten. Man ordnet zu diesem Zweck jeder Ausgangsachse der Integraltriebe, Summentriebe und Funktionstriebe eine Veränderliche $x_1, y_2, \ldots, y_n$ zu und stellt die aus dem Kraftflußplan folgenden, durch die n Grundtriebe bestimmten Grundbeziehungen auf.

Für die Integraltriebe liefert (1) unmittelbar Beziehungen der Form

$$\mathrm{d}y_i = k_i y_k \,\mathrm{d}x \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}y_i = k_i x \,\mathrm{d}y_k \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}y_i = k_i y_k \,\mathrm{d}y_l \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}y_i = k_i x \,\mathrm{d}x \quad . \quad (1\,\mathrm{a}).$$

Bei den Summentrieben ergibt sich aus (2) durch Differentiation

$$\mathrm{d}y_i = a_i \,\mathrm{d}y_k + b_i \,\mathrm{d}x \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}y_i = a_i \,\mathrm{d}y_k + b_i \,\mathrm{d}y_l \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2\,\mathrm{a})$$

und ebenso aus (3) bei den Funktionstrieben

$$\mathrm{d}y_i = f'(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{oder} \quad \mathrm{d}y_i = f'(y_k)\,\mathrm{d}y_k \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3\,\mathrm{a}).$$

Indem man nun von einer Achse y_i aus entgegengesetzt zum Kraftfluß bis zur x-Achse zurückgeht, erhält man eine Folge von Differentialbeziehungen (1 a), (2 a), (3 a) zwischen $\mathrm{d}y_i$, $\mathrm{d}y_k, \ldots, \mathrm{d}y_r$, $\mathrm{d}x$. Nach Elimination von $\mathrm{d}y_k, \ldots, \mathrm{d}y_r$ bleibt eine Differentialgleichung von der Form

$$\mathrm{d}y_i = (Y_{i1} + Y_{i2} + \cdots + Y_{i\,p_i})\,\mathrm{d}x$$

übrig, in der die Y_{ik} Produkte von Funktionen $\varphi(x), \psi(y_1), \ldots, \chi(y_n)$ sind. Hieraus folgt

Satz I: Jedes mit der Integriermaschine lösbare Problem läßt sich auf ein Differentialgleichungssystem von der Form

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{p_1} Y_{1i}, \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{p_2} Y_{2i}, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = \sum_{i=1}^{p_n} Y_{ni} \quad . \; . \; . \quad (7)$$

zurückführen, wobei die Summanden Y_{ik} Produkte von Funktionen $\varphi(x), \psi_{y_1}), \ldots, \chi(y_n)$ sind. Die Zurückführung erfordert unter Umständen auch Differentiationen.

Umgekehrt kann man zu jedem Differentialgleichungssystem (7) einen Schaltplan und Kraftflußplan angeben, d. h. in Umkehrung von Satz I gilt

Satz II: Jedes Differentialgleichungssystem (7) kann mit der Integriermaschine gelöst werden.

Durch dieselben Schlüsse kommt man zu analogen Sätzen, wenn man nur gewisse von den drei Typen der Grundtriebe zuläßt. So folgt für Schaltungen ohne Summentriebe

Satz III: Durch Schaltungen mit Integraltrieben und Funktionstrieben allein lassen sich die Differentialgleichungssysteme

$$\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x} = Y_1, \quad \frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x} = Y_2, \quad \ldots, \quad \frac{\mathrm{d}y_n}{\mathrm{d}x} = Y_n \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (8)$$

lösen, auf denen die rechten Seiten Y_i Produkte von Funktionen $\varphi(x), \psi(y_1), \ldots, \chi(y_n)$ sind. Das System (7) spezialisiert sich zum System (8), wenn sämtliche Summen auf den rechten Seiten von (7) eingliedrig sind.

Für Schaltungen ohne Funktionstriebe erhält man den

Satz IV: Durch Schaltungen mit Integraltrieben und Summentrieben allein lassen sich die Differentialgleichungssysteme

$$\frac{dy_1}{dx} = P_1, \quad \frac{dy_2}{dx} = P_2, \quad \ldots, \quad \frac{dy_n}{dx} = P_n \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

lösen, bei denen die rechten Seiten P_i Polynome in $x, y_1, \ldots, y_n$ sind. Läßt man auch keine Summentriebe sondern lediglich Integraltriebe zu, so sind alle Polynome P_i eingliedrig.

Aus den n Gl. (9) und den aus einer der Gl. (9), etwa $\frac{dy_i}{dx} = P_i$, durch wiederholte Differentiation bis zur n-ten Ordnung sich ergebenden weiteren $(n-1)$ Beziehungen kann man alle Funktionen y_k und alle Differentialquotienten $y'_k = \frac{dy_k}{dx}$ für $k \neq i$ eliminieren und erhält dann für $y = y_i$ eine Differentialgleichung n-ter Ordnung in der Form

$$P(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0;$$

hierbei bedeutet P ein Polynom in $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$. Umgekehrt kann jede Differentialgleichung $P = 0$ auf ein System (9) zurückgeführt werden. Zu diesem Zwecke setzt man etwa

$$y' = y_1, \quad y'' = y_2, \quad \ldots, \quad y^{(n)} = y_n \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

und erhält dann aus

$$\frac{dP}{dx} = P_x + P_y y' + P_{y'} y'' + \cdots + P_{y^{(n)}} \cdot y^{(n+1)} = 0$$

durch Auflösung nach $y^{(n+1)}$ die zusätzliche Differentialgleichung

$$y'_n = A/B \quad \ldots \ldots \quad (11),$$

in der A und B wieder Polynome in $x, y, y_1, \ldots, y_n$ bedeuten. Schließlich führt man mit

$$y_{n+1} = 1/B$$

noch eine weitere Veränderliche ein und spaltet (11) in die beiden Differentialgleichungen

$$y'_n = A\, y_{n+1}, \quad y'_{n+1} = -B' y^2_{n+1} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

auf. Hierin ist

$$B' = B_x + B_y y_1 + B_{y_1} y_2 + \cdots B_{y_n} y_{n+1}$$

ein Polynom in $x, y, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$. Somit ist das aus der Differentialgleichung $P = 0$ hergeleitete System der $(n+2)$ Differentialgleichungen (10) und (12) mit den $(n+2)$ gesuchten Funktionen $y, y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ von der Form (9), w. z. bew. w. Wir fassen das Ergebnis zusammen in

Satz V: Eine Differentialgleichung n-ter Ordnung läßt sich dann und nur dann durch eine Schaltung der Integriermaschine mit Integraltrieben und Summentrieben allein lösen, wenn sie auf die Form

$$P(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

gebracht werden kann, wobei P ein Polynom in $x, y, y', \ldots, y^{(n)}$ bedeutet.

Durch die vorangehenden Sätze ist die Menge der mit der Integriermaschine lösbaren Differentialgleichungen und Systeme von Differentialgleichungen vollständig abgegrenzt. Jedoch erfordert die Zurückführung einer vorgegebenen Differentialgleichung auf die kanonischen Formen (7), (8), (9) oder (13) unter Umständen mühsame Umformungsprozesse und gegebenenfalls mehrfache Differentiationen. Es ist daher keineswegs immer unmittelbar zu sehen, ob und wie die Zurückführung auf eine der kanonischen Formen möglich ist. Tatsächlich ist der durch (7) und auch der durch (9) gekennzeichnete Wirkungsbereich so weitreichend, daß man im mathematischen und technischen Schrifttum kaum eine außerhalb des Wirkungsbereichs liegende Differentialgleichung findet. So lassen sich etwa alle Systeme von Differentialgleichungen, in denen die Differentialquotienten als rationale Ausdrücke von elementaren Funktionen, Besselfunktionen, Kugelfunktionen, hypergeometrischen Funktionen usf. gegeben

sind, auf die kanonische Form (9) bringen. Der Wirkungsbereich wird nur dann überschritten, wenn in den Differentialgleichungen empirische Funktionen von 2 und mehr Veränderlichen vorkommen. Aber auch in diesen Fällen kann man vielfach die Anwendung der Integriermaschine durch Zuhilfenahme von Netztafeln ermöglichen.

Als einfaches Beispiel der Zurückführung auf die kanonische Form (9) behandeln wir die Differentialgleichung

$$y'' = \cos x + y^2 \quad \text{(14)}.$$

Die Funktion $\cos x$ wird als partikuläre Lösung y_1 von

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = -y_1$$

angesetzt, so daß man als kanonisches System (9) die vier Gleichungen

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = -y_1, \quad \frac{dy_3}{dx} = y_4, \quad \frac{dy_4}{dx} = y_1 + y_3^2$$

erhält. Außerdam kann man (14) auch auf (13) zurückführen. Zu diesem Zweck eliminiert man aus (14) und der durch Ableitung gewonnenen Beziehung

$$y''' = -\sin x + 2yy'$$

die Veränderliche x und findet dabei

$$P(x, y, y', y'', y''') = (y''' - 2yy')^2 + (y'' - y^2)^2 - 1 = 0.$$

Wenn die Zurückführung einer Differentialgleichung auf eine kanonische Form nur mit Hinzunahme von Differentiationen möglich ist, so liefern die zugehörigen Schaltungen die Lösungen der gegebenen Differentialgleichung nur bei Einstellung bestimmter Anfangsbedingungen an den Eingangsachsen der Integraltriebe. Bei anderen Anfangsbedingungen ergeben sich die restlichen Lösungen einer übergeordneten Differentialgleichung, deren Lösungsmannigfaltigkeit die Lösungen der gegebenen Differentialgleichung als Teilmenge enthält.

Der Wirkungsbereich der Integriermaschine wird nicht erweitert, wenn man als zusätzliche Grundtriebe noch Produkttriebe zur Multiplikation von Achsendrehungen hinzunimmt, da die Produktbildung auch mit Integraltrieben und einem Summentrieb durchgeführt werden kann. Um dies einzusehen, braucht man die Gleichung

$$w = u \cdot v$$

nach Differentiation nur in die drei Beziehungen

$$dp = u\,dv, \quad dq = v\,du, \quad dw = dp + dq$$

aufzuspalten. Man erhält dann für die Produktbildung die in Bild 7 angegebene Schaltung, bei der die u-Achse und die v-Achse aus der übrigen Schaltung heraus angetrieben sind.

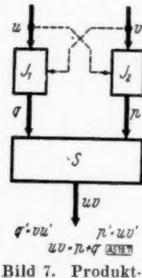


Bild 7. Produktschaltung.

§ 7. Zusammenfassung.

Die zunächst der Untersuchung des Kraftflusses in den Schaltungen der Integriermaschine dienenden Kraftflußpläne führen auch zu theoretischen Erkenntnissen. Mit ihrer Hilfe wurden Klasseneinteilungen der Schaltungen vorgenommen und kanonische Formen entwickelt, auf die sich alle mit der Integriermaschine lösbaren Differentialgleichungssysteme zurückführen lassen. Dabei ergibt sich ein so weitreichender Wirkungsbereich, daß die meisten in der Mathematik untersuchten und in den Anwendungen auftretenden Differentialgleichungen in ihm enthalten sind. 519

Eingegangen am 3. 11. 1943.

Eine Bemerkung zur numerischen Differentiation durch Approximation, ausgeführt am Beispiel der Kugelfunktionen als Approximationsfunktionen.

Von *Erwin Fehlberg* in Berlin-Charlottenburg.

Zur Berechnung der Koeffizienten, die bei der Entwicklung gegebener Funktionen nach Kugelfunktionen auftreten, wird die zu entwickelnde Funktion abschnittsweise durch Parabeln ersetzt und das Produkt dieser Näherungsparabeln mit den entsprechenden Kugelfunktionen exakt integriert. Das Verfahren bewährt sich auch bei der Berechnung eines Näherungswertes der ersten Ableitung der gegebenen Funktion, wie an einem Beispiel gezeigt wird.

I. Allgemeines.

Bei der Approximation einer stetigen Funktion $f(\tau)$ durch Kugelfunktionen $P_n(\tau)$ erhält man die Koeffizienten der Entwicklung bekanntlich durch die folgenden Integrale

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \int_{-1}^{+1} f(\tau)\, P_n(\tau)\, d\tau, \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots \quad (1).$$

Die Genauigkeit der Approximation hängt außer von der Gliederzahl im wesentlichen von der Genauigkeit ab, mit der die obigen Koeffizienten berechnet werden können. In der einschlägigen Literatur wird zur Berechnung dieser Integrale meist die Simpsonsche Regel oder dergleichen empfohlen.

Während für kleine Indizes n die Genauigkeit dieser Verfahren bei praktisch durchführbarer Schrittweite der Integration im allgemeinen ausreichend ist, trifft dies bei größeren Indizes n nicht mehr zu. Der Grund hierfür liegt in der mit zunehmendem Index n sich ständig vergrößernden Schwingungszahl der Kugelfunktionen für das Grundintervall $-1 \leqq \tau \leqq +1$.

Um bei der Berechnung der Integrale (1) die Schwingungen der Approximationsfunktionen ausreichend genau zu erfassen, wurde hier ein neuer Weg eingeschlagen: Das Grundintervall $-1 \leqq \tau \leqq +1$ wird in Teilintervalle der Intervallbreite $\Delta\tau = 0{,}1$ eingeteilt. Für je 2 aufeinander folgende Teilintervalle wird die Funktion $f(\tau)$ durch eine Parabel 2. Ordnung ersetzt, die in den 3 Endpunkten der Intervalle mit den Funktionswerten $f(\tau_k)$ übereinstimmt, Bild 1. Für solche Parabeln sind aber die Integrale (1) exakt ausführbar.

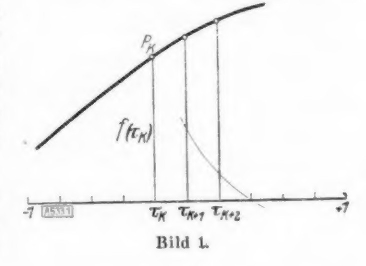


Bild 1.

Der wesentliche Unterschied gegenüber allen früheren Verfahren besteht also darin, daß nur für $f(\tau)$ ein angenäherter, für die Kugelfunktionen dagegen der genaue Funktionsverlauf benutzt wird.

Durch Differentiation des Kugelfunktionsansatzes erhält man für den gesuchten Differentialquotienten von $f(\tau)$ einen Näherungswert.

An einem Beispiel wird gezeigt, daß die hier vorgeschlagene Methode zur Berechnung der Integrale (1) vollkommen ausreichende Näherungswerte für die erste Ableitung von $f(\tau)$ liefert, während die Auswertung nach der Simpsonschen Regel (bei gleicher Schrittweite) für die Differentiation zu bedeutend schlechteren Ergebnissen führt.

Der hier für die Berechnung der Kugelfunktionskoeffizienten eingeschlagene Weg läßt sich in gleicher Weise ganz allgemein für die Berechnung der Koeffizienten einer Entwicklung nach Funktionen eines vorgelegten Orthogonalsystems anwenden[1]).

II. Die Berechnung der Kugelfunktionskoeffizienten.

Nach der Newtonschen Interpolationsformel erhält man für die Parabel 2. Ordnung, die durch die drei Punkte

[1]) Dies wird zur Zeit von Herrn E.-A. Behrens für die Entwicklung periodischer Funktionen in Fouriersche Reihen durchgeführt. Die Ergebnisse werden demnächst veröffentlicht.

$$\tau_k \quad , \quad f(\tau_k) = f_k ,$$
$$\tau_{k+1} = \tau_k + \Delta\tau \quad , \quad f(\tau_{k+1}) = f_{k+1} = f_k + \Delta f_k ,$$
$$\tau_{k+2} = \tau_k + 2\Delta\tau , \quad f(\tau_{k+2}) = f_{k+2} = f_k + 2\Delta f_k + \Delta^2 f_k$$

geht:

$$f_p(\tau) = f_k + \frac{\Delta f_k}{\Delta\tau}(\tau - \tau_k) + \frac{\Delta^2 f_k}{2(\Delta\tau)^2}(\tau - \tau_k)(\tau - \tau_{k+1}) \quad \ldots \ldots \quad (2).$$

Einsetzen in (1) liefert:

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \cdot \sum_k \left\{ f_k \int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} P_n(\tau)\,d\tau + \frac{\Delta f_k}{\Delta\tau} \cdot \int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k) P_n(\tau)\,d\tau + \frac{\Delta^2 f_k}{2(\Delta\tau)^2} \cdot \int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k)(\tau - \tau_{k+1}) \cdot P_n(\tau)\,d\tau \right\}.$$

Setzt man abkürzend:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} P_n(\tau)\,d\tau = J_n(\tau_k, \tau_{k+2}) = (-1)^n \int_{\tau_{-(k+2)}}^{\tau_{-k}} P_n(\tau)\,d\tau , \\
&\int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k) P_n(\tau)\,d\tau = K_{k,n}(\tau_k, \tau_{k+2}) = (-1)^{n+1} \int_{\tau_{-(k+2)}}^{\tau_{-k}} (\tau - \tau_k) P_n(\tau)\,d\tau , \\
&\int_{\tau_k}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k)(\tau - \tau_{k+1}) P_n(\tau)\,d\tau = L_{k,k+1,n}(\tau_k, \tau_{k+2}) = (-1)^n \int_{\tau_{-(k+2)}}^{\tau_{-k}} (\tau - \tau_k)(\tau - \tau_{-(k+1)}) P_n(\tau)\,d\tau
\end{aligned}\right\} \quad (3),$$

so findet man wegen

$$P_n(\tau) = \frac{1}{2n+1}[P'_{n+1}(\tau) - P'_{n-1}(\tau)] \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

$$J_n(\tau_k, \tau_{k+2}) = \frac{1}{2n+1}[P_{n+1}(\tau_{k+2}) - P_{n+1}(\tau_k)] - \frac{1}{2n+1} \cdot [P_{n-1}(\tau_{k+2}) - P_{n-1}(\tau_k)] \quad \ldots \quad (5),$$

$$\left.\begin{aligned}
K_{k,n}(\tau_k, \tau_{k+2}) = &\frac{2\Delta\tau}{2n+1}[P_{n+1}(\tau_{k+2}) - P_{n-1}(\tau_{k+2})] \\
&- \frac{1}{2n+1}[J_{n+1}(\tau_k, \tau_{k+2}) - J_{n-1}(\tau_k, \tau_{k+2})]
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (6),$$

$$\left.\begin{aligned}
L_{k,k+1,n}(\tau_k, \tau_{k+2}) = &\frac{2(\Delta\tau)^2}{2n+1}[P_{n+1}(\tau_{k+2}) - P_{n-1}(\tau_{k+2})] \\
&- \frac{4(\Delta\tau)}{2n+1}\left\{\frac{1}{2n+3}[P_{n+2}(\tau_{k+2}) - P_n(\tau_{k+2})] - \frac{1}{2n-1} \cdot [P_n(\tau_{k+2}) - P_{n-2}(\tau_{k+2})]\right\} \\
&+ \frac{\Delta\tau}{2n+1}[J_{n+1}(\tau_k, \tau_{k+2}) - J_{n-1}(\tau_k, \tau_{k+2})] \\
&+ \frac{2}{2n+1}\left\{\frac{1}{2n+3}[J_{n+2}(\tau_k, \tau_{k+2}) - J_n(\tau_k, \tau_{k+2})] \right. \\
&\qquad \left. - \frac{1}{2n-1}[J_n(\tau_k, \tau_{k+2}) - J_{n-2}(\tau_k, \tau_{k+2})]\right\}
\end{aligned}\right\} (7).$$

Die Zahlenwerte dieser Funktionen sind den Zahlentafeln 1 bis 3[2]) zu entnehmen. Die Werte dieser Tabellen lassen sich aus jeder Tabelle der Kugelfunktionen[3]) ableiten.

Für den Kugelfunktionskoeffizienten a_n ergibt sich dann

$$\left.\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{2} \sum_k^{(0,1)} &\Big\{[f_k + (-1)^n f_{-k}](2n+1) J_n(\tau_k, \tau_{k+2}) \\
&+ \frac{1}{|\Delta\tau|}[\Delta f_k + (-1)^n \Delta f_{-k}](2n+1) K_{k,n}(\tau_k, \tau_{k+2}) \\
&+ \frac{1}{2|\Delta\tau|^2}[\Delta^2 f_k + (-1)^n \Delta^2 f_{-k}](2n+1) L_{k,k+1,n}(\tau_k, \tau_{k+2})\Big\}
\end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (8).$$

[2]) Die Berechnung der Tabellen sowie die Zahlenrechnung zu Kap. III verdanke ich Frl. M. Kristahn.

[3]) Z. B.: Tallquist: Tafeln der Kugelfunktionen $P_n(x)$ und ihrer abgeleiteten Funktionen. Acta Soc. Sc. Fennicae 32 (1906), N. 6. Die Tabellen bei Tallquist gehen bis $n = 8$; für die weiteren Werte bis $n = 12$ wurden Tabellen für $P_n(x)$, $P'_n(x)$ und $P''_n(x)$ auf 5 Dezimalen mit einem Argumentschritt von 0,1 berechnet. Abzüge werden vom Verfasser gern zur Verfügung gestellt.

Zahlentafel 1.

$$(2n+1)\,J_n(\tau_k,\tau_{k+2}) = (-1)^n\,(2n+1)\,J_n(\tau_{-(k+2)},\tau_{-k}).$$

$(\tau_k;\tau_{k+2})$ / n	(0; 0,2)	(0,2; 0,4)	(0,4; 0,6)	(0,6; 0,8)	(0,8; 1)
0	+ 0,200000000	+ 0,200000000	+ 0,200000000	+ 0,200000000	+ 0,200000000
1	+ 0,060000000	+ 0,180000000	+ 0,300000000	+ 0,420000000	+ 0,540000000
2	— 0,480000000	— 0,360000000	— 0,120000000	+ 0,240000000	+ 0,720000000
3	— 0,203000000	— 0,525000000	— 0,595000000	— 0,245000000	+ 0,693000000
4	+ 0,587520000	+ 0,123120000	— 0,503280000	— 0,686880000	+ 0,479520000
5	+ 0,374924000	+ 0,718212000	+ 0,174460000	— 0,738892000	+ 0,158796000
6	— 0,601036800	+ 0,315806400	+ 0,760468800	— 0,315369600	— 0,159868800
7	— 0,544926300	— 0,600646500	+ 0,599878500	+ 0,334897500	— 0,375140700
8	+ 0,539473920	— 0,713647080	— 0,194528280	+ 0,796207920	— 0,427506480
9	+ 0,688168076	+ 0,195201538	— 0,819840310	+ 0,773187042	— 0,317185096
10	— 0,42027246	+ 0,85458908	— 0,62540633	+ 0,29144786	— 0,10035815
11	— 0,78588862	+ 0,31685807	+ 0,19159946	— 0,32833678	+ 0,13408818
12	+ 0,2640153	— 0,6597033	+ 0,7948116	— 0,6973162	+ 0,2981926

Zahlentafel 2.

$$(2n+1)\,K_{k,n}(\tau_k,\tau_{k+2}) = (2n+1)\,(-1)^{n+1}\,K_{k,n}(\tau_{-(k+2)},\tau_{-k}).$$

$(\tau_k;\tau_{k+2})$ / n	(0; 0,2)	(0,2; 0,4)	(0,4; 0,6)	(0,6; 0,8)	(0,8; 1)
0	+ 0,020000000	+ 0,020000000	+ 0,020000000	+ 0,020000000	+ 0,020000000
1	+ 0,008000000	+ 0,020000000	+ 0,032000000	+ 0,044000000	+ 0,056000000
2	— 0,047000000	— 0,033000000	— 0,007000000	+ 0,031000000	+ 0,081000000
3	— 0,026880000	— 0,056280000	— 0,057680000	— 0,014280000	+ 0,090720000
4	+ 0,054420000	+ 0,001836000	— 0,059388000	— 0,063732000	+ 0,084564000
5	+ 0,048998400	+ 0,070514400	+ 0,001601600	— 0,083820000	+ 0,065577600
6	— 0,049794940	+ 0,048289020	+ 0,070915780	— 0,057524740	+ 0,039445380
7	— 0,069765120	— 0,045655020	+ 0,077989080	+ 0,003933180	+ 0,012849840
8	+ 0,035346992	— 0,085151497	+ 0,009401102	+ 0,067133741	— 0,008315428
9	+ 0,085474099	— 0,009906285	— 0,072861975	+ 0,096394310	— 0,020368480
10	— 0,013666049	+ 0,083360652	— 0,089697842	+ 0,075041198	— 0,022523873
11	— 0,093415372	+ 0,067612681	— 0,022723998	+ 0,014953480	— 0,016706663
12	— 0,01198478	— 0,03945981	+ 0,06628978	— 0,05098563	— 0,00662900

Zahlentafel 3.

$$(2n+1)\,L_{k,k+1,n}(\tau_k,\tau_{k+2}) = (2n+1)\,(-1)^n\,L_{k,k+1,n}(\tau_{-(k+2)},\tau_{-k}].$$

$(\tau_k;\tau_{k+2})$ / n	(0; 0,2)	(0,2; 0,4)	(0,4; 0,6)	(0,6; 0,8)	(0,8; 1)
0	+ 0,000666667	+ 0,000666667	+ 0,000666667	+ 0,000666667	+ 0,000666667
1	+ 0,000400000	+ 0,000800000	+ 0,001200000	+ 0,001600000	+ 0,002000000
2	— 0,001486667	— 0,000886667	+ 0,000113333	+ 0,001513333	+ 0,003313333
3	— 0,001325333	— 0,002100000	— 0,001754667	+ 0,000270667	+ 0,004536000
4	+ 0,001470000	— 0,000658800	— 0,002538000	— 0,001647600	+ 0,005540400
5	+ 0,002351213	+ 0,002152920	— 0,001063773	— 0,003282547	+ 0,006165720
6	— 0,000851162	+ 0,002670018	+ 0,001810614	— 0,003617198	+ 0,006265350
7	— 0,003202270	— 0,000373007	+ 0,003614928	— 0,002135737	+ 0,005761822
8	— 0,000255032	— 0,003496346	+ 0,002380058	+ 0,000764540	+ 0,004688905
9	+ 0,003658061	— 0,002412770	— 0,001305217	+ 0,003799279	+ 0,003203693
10	+ 0,001676056	+ 0,002114470	— 0,004367486	+ 0,005356674	+ 0,001561090
11	— 0,003569566	+ 0,004440592	— 0,003803490	+ 0,004366756	+ 0,000055856
12	— 0,003187451	+ 0,001079996	+ 0,000378518	+ 0,001007242	— 0,001051262

Hierbei bedeutet f_{-k} den Funktionswert $f_{(k)}$ an der negativen Stelle

$$\tau_{-k} \quad \text{und} \quad \Delta f_{-k} = f_{-(k+1)} - f_{-k} \quad \text{sowie} \quad \Delta^2 f_{-k} = \Delta f_{-(k+1)} - \Delta f_{-k}.$$

Unter Benutzung der Tabellen 1, 2 und 3 kann die Berechnung der Kugelfunktionskoeffizienten bequem mit der Rechenmaschine durchgeführt werden.

III. Fehlerbetrachtung.

Man hat zwei verschiedene Fehler zu berücksichtigen:

1. Da man die vorgelegte Funktion $f(\tau)$ auf dem Intervall $\langle -1, +1 \rangle$ für die Berechnung der Kugelfunktionskoeffizienten a_n durch ein System von aneinander gehängten Parabeln 2. Ordnung $f_p(\tau)$ ersetzt, so ist:

$$\Omega_1 = \int_{-1}^{+1} [f(\tau) - f_p(\tau)]^2 \, d\tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (9).$$

2. Wenn man die Kugelfunktionsentwicklung der aneinandergehängten Parabeln mit dem Index $n = N$ abbricht, so ist:

$$\Omega_2 = \int_{-1}^{+1} \left[f_p(\tau) - \sum_{n=0}^{N} a_n \cdot P_n(\tau) \right]^2 d\tau \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (10),$$

$$\Omega_2 = \int_{-1}^{+1} [f_p(\tau)]^2 \, d\tau - \sum_{n=0}^{N} \frac{2}{2n+1} \cdot a_n^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (11).$$

Die Konvergenz der Kugelfunktionsentwicklung — nicht nur im Mittel, sondern an jeder Stelle x des Intervalls $\langle -1, +1 \rangle$ — ist bekanntlich immer gewährleistet, wenn die zu entwickelnde Funktion der Dirichletschen Bedingung genügt, d. h. wenn sich das Intervall $\langle -1, +1 \rangle$ in endlich viele Teilintervalle so zerlegen läßt, daß die Funktion auf jedem Teilintervall monoton ist[4]). Diese Bedingung erfüllt der Parabelzug $f_p(\tau)$ sicher, womit die Konvergenz der Kugelfunktionsentwicklung sichergestellt ist.

Die Ausdrücke für Ω_1 und Ω_2 sollen noch weiter ausgeführt werden. Um einen Näherungsausdruck für Ω_1 zu gewinnen, genügt es offenbar für $f(\tau)$ eine Newtonsche Interpolationsparabel 3. Ordnung anzusetzen. Und zwar wähle man **auf** $\langle \tau_k, \tau_{k+1} \rangle$ diejenige, die an den 4 Stellen $\tau_{k-1}, \tau_k, \tau_{k+1}, \tau_{k+2}$ mit $f(\tau)$ übereinstimmt, während auf $\langle \tau_{k+1}, \tau_{k+2} \rangle$ diejenige anzusetzen ist, die an den 4 Stellen $\tau_k, \tau_{k+1}, \tau_{k+2}, \tau_{k+3}$ mit $f(\tau)$ übereinstimmt:

$$\langle \tau_k, \quad \tau_{k+1} \rangle : f(\tau) \sim f_k + \frac{\Delta f_k}{\Delta \tau}(\tau - \tau_k) + \frac{\Delta^2 f_k}{2!(\Delta \tau)^2}(\tau - \tau_k)(\tau - \tau_{k+1}) + \frac{\Delta^3 f_{k-1}}{3!(\Delta \tau)^3}(\tau - \tau_k)(\tau - \tau_{k+1})(\tau - \tau_{k+2}),$$

$$\langle \tau_{k+1}, \tau_{k+2} \rangle : f(\tau) \sim f_k + \frac{\Delta f_k}{\Delta \tau}(\tau - \tau_k) + \frac{\Delta^2 f_k}{2!(\Delta \tau)^2}(\tau - \tau_k)(\tau - \tau_{k+1}) + \frac{\Delta^3 f_k}{3!(\Delta \tau)^3}(\tau - \tau_k)(\tau - \tau_{k+1})(\tau - \tau_{k+2}).$$

Einsetzen in (9) liefert:

$$\Omega_1 = \sum_k \left\{ \frac{[\Delta^3 f_{k-1}]^2}{(3!)^2 \cdot (\Delta \tau)^6} \cdot \int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} (\tau - \tau_k)^2 (\tau - \tau_{k+1})^2 \cdot (\tau - \tau_{k+2})^2 \, d\tau \right.$$

$$\left. + \frac{[\Delta^3 f_k]^2}{(3!)^2 \cdot (\Delta \tau)^6} \int_{\tau_{k+1}}^{\tau_{k+2}} (\tau - \tau_k)^2 (\tau - \tau_{k+1})^2 (\tau - \tau_{k+2})^2 \, d\tau \right\}.$$

Eine elementare Zwischenrechnung liefert schließlich:

$$\Omega_1 = \frac{8}{105} \cdot \frac{1}{(3!)^2} \cdot \Delta \tau \cdot \sum_i [\Delta^3 f_i]^2 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (12).$$

Der Summationsbuchstabe i soll andeuten, daß jetzt über jeden Teilpunkt des Intervalls $\langle -1, +1 \rangle$ zu summieren ist (bei dem Summationsbuchstaben k war nur über jeden 2. Teilpunkt zu summieren).

---

[4]) Vgl. z. B. Frank-v. Mises: Die Differential- und Integralgleichungen der Mechanik und Physik, Bd. I, Braunschweig 1930, S. 438.

Für Ω_2 erhält man, wenn man für $f_p(\tau)$ den Ausdruck (2) einsetzt nach kurzer Rechnung:

$$\left.\begin{aligned}\Omega_2 = 2\cdot\Delta\tau\Big\{\sum_k [f_k]^2 + 2\cdot\sum_k [f_k]\cdot[\Delta f_k] + \frac{1}{3}\sum_k [f_k]\cdot[\Delta^2 f_k] + \frac{2}{3}\sum_k [\Delta f_k]\cdot[\Delta^2 f_k] \\ + \frac{4}{3}\sum_k [\Delta f_k]^2 + \frac{2}{15}\cdot\sum_k [\Delta^2 f_k]^2\Big\} - \sum_{n=0}^{N}\frac{2}{2n+1}\cdot a_n^2\end{aligned}\right\} \quad (13).$$

Aus dem Wert für Ω_2 kann man nun offenbar sofort eine Aussage darüber machen, bis zu welchem Index N man die Kugelfunktionsentwicklung höchstens zu erstrecken braucht.

Da nämlich Ω_1 der Fehler ist, der dadurch entsteht, daß man die Kurve $f(\tau)$ durch aneinandergehängte Parabeln 2. Ordnung $f_p(\tau)$ ersetzt, so hat es offenbar keinen Zweck, die Kugelfunktionsentwicklung von $f(\tau)$ oder genauer des Parabelzuges $f_p(\tau)$ weiter fortzusetzen, als bis Ω_2 etwa gleich Ω_1 wird, weil man sich doch letzten Endes für die Entwicklung von $f(\tau)$ und nicht für die des Parabelzuges $f_p(\tau)$ interessiert.

Eine analoge Fehlerbetrachtung läßt sich nun für die Differentialquotienten von $f(\tau)$ anstellen. Es seien für den ersten Differentialquotienten die Ergebnisse kurz mitgeteilt.

$$\Omega_1' = \frac{4}{5}\cdot\frac{1}{(3!)^2}\cdot\frac{1}{\Delta\tau}\cdot\sum_i [\Delta^3 f_i]^2 \quad (14).$$

Für Ω_2' ergibt sich ein etwas komplizierterer Ausdruck, da die ersten Differentialquotienten $P_n'(\tau)$ der Kugelfunktionen nicht mehr orthogonal sind:

$$\left.\begin{aligned}\Omega_2' = \frac{7}{6}\cdot\frac{1}{\Delta\tau}\cdot\sum_k [\Delta^2 f_k]^2 + \frac{2}{\Delta\tau}\cdot\sum_k [\Delta f_k]^2 + \frac{2}{\Delta\tau}\cdot\sum_k [\Delta f_k]\cdot[\Delta^2 f_k] \\ - \frac{2}{\Delta\tau}\cdot\sum_{n=1}^{N'} a_n\cdot\Big\{\sum_k P_n(\tau_{k+2})\Big[\Delta f_k + \frac{3}{2}\cdot\Delta^2 f_k\Big] - \sum_k P_n(\tau_k)\Big[\Delta f_k - \frac{1}{2}\Delta^2 f_k\Big]\Big\} \\ + \frac{2}{(\Delta\tau)^2}\cdot\sum_{n=1}^{N'}\frac{a_n}{2n+1}\cdot\Big\{\sum_k [\Delta^2 f_k]\cdot(2n+1)\cdot J_n(\tau_k,\tau_{k+2})\Big\} \\ + 2\cdot\sum_{\substack{1\le m,n\le N'\\ m>n}} A_{mn}\cdot a_m\cdot a_n + \sum_{n=1}^{N'} A_{nn}\cdot a_n^2\end{aligned}\right\} \quad (15).$$

Für die Zahlen $A_{mn} = \int_{-1}^{+1} P_m'(\tau)\cdot P_n'(\tau)\,d\tau$ ergibt sich:

$$A_{mn} = \left\{\begin{array}{ll} l(l+1), & \text{wenn } m \text{ und } n \text{ beide gerade oder beide ungerade} \\ & \text{sind und } l \text{ die kleinere der beiden Zahlen ist.} \\ 0\ , & \text{wenn von } m \text{ und } n \text{ die eine Zahl gerade, die andere} \\ & \text{Zahl ungerade ist.}\end{array}\right\} \quad (16).$$

Man kann die Entwicklung $\sum_{n=1}^{N'} a_n P_n'(\tau)$ offenbar wieder abbrechen, sobald Ω_2' etwa gleich Ω_1' wird. Es ist natürlich nicht notwendig $N' = N$, d. h. man muß im allgemeinen die Kugelfunktionsentwicklung $\sum_{n=1}^{N} a_n P_n(\tau)$ für $f(\tau)$ und die Reihe $\sum_{n=1}^{N'} a_n P_n'(\tau)$ für $f'(\tau)$ bei verschiedenen Indizes abbrechen.

IV. Ein Beispiel.

Um den Unterschied zwischen den nach der Simpsonschen Regel und den über die Hilfsfunktionen J, K, L berechneten Kugelfunktionskoeffizienten zu zeigen, genügt es, als Beispiel für $f(\tau)$ eine Kugelfunktion selbst zu nehmen. Es wurde $f(\tau) = P_6(\tau)$ gewählt.

Die Entwicklung ergibt, wenn bei beiden Integrationsverfahren die gleiche Intervallbreite $\Delta\tau = 0{,}1$ zugrunde gelegt wird:

n	nach Simpson a_n	über J, K, L a_n	n	nach Simpson a_n	über J, K, L a_n
0	+ 0,00069	+ 0,00069	7	0	0
1	0	0	8	+ 0,39330	+ 0,01309
2	+ 0,00889	+ 0,00789	9	0	0
3	0	0	10	+ 0,70867	− 0,01251
4	+ 0,04648	+ 0,02219	11	0	0
5	0	0	12	+ 0,91486	− 0,04044
6	+ 1,15957	+ 1,02402			

Hält man daneben die exakten Werte $a_n = 0$ für $n \neq 6$ und $a_6 = 1$, so erkennt man deutlich, wie mit zunehmendem Index n die Ergebnisse der Simpsonschen Regel immer unzulänglicher werden.

Die Fehlerbetrachtung für $f(\tau) = P_6(\tau)$ und für $f'(\tau) = P_6'(\tau)$ ergibt:

$$\Omega_1 = 0{,}00074 \qquad \Omega_1' = 0{,}78$$

sowie

N	Ω_2
6	0,00039
8	0,00037
10	0,00036
12	0,00023

und

N'	Ω_2'
6	0,82
8	0,93
10	0,76
12	0,10

Daraus folgt, daß man die Entwicklung für $P_6(\tau)$ bereits mit dem Index $N = 6$ abzubrechen hat; für $P_6'(\tau)$ kann man entweder bis $N' = 6$ oder bis $N' = 10$ gehen.

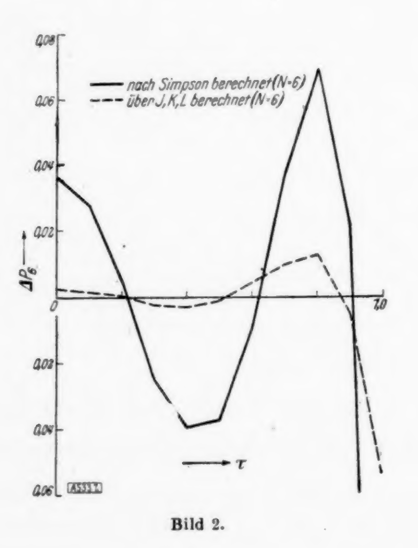


Bild 2.

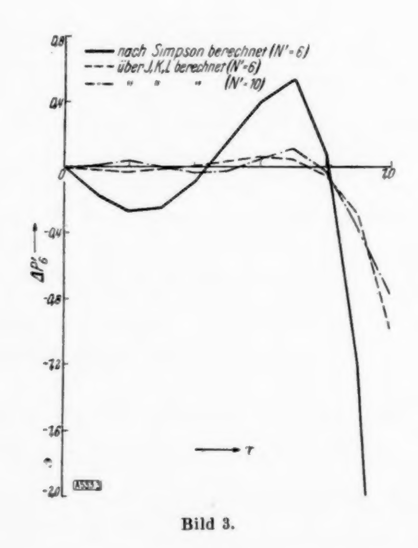


Bild 3.

In Bild 2 ist die Differenz ΔP_6 zwischen den genauen Werten und den nach beiden Methoden gewonnenen Näherungswerten P_6 dargestellt.

In Bild 3 ist die entsprechende Differenz $\Delta P_6'$ aufgetragen.

Der Vergleich der Differenzen der Abbildungen läßt die Reichweite des hier entwickelten Verfahrens erkennen. 533

Eingegangen am 25. 1. 44.

Bemerkung zu einem Satze von Hurwitz.

Von *Herbert Bilharz* in Braunschweig.

Als Erweiterung eines Satzes von A. Hurwitz wird im Anschluß an I. Schur ein Determinantenkriterium angegeben, welches notwendig und hinreichend dafür ist, daß sämtliche Wurzeln einer algebraischen Gleichung mit komplexen Koeffizienten nur negative Realteile besitzen. Zur numerischen Berechnung der einzelnen Determinanten wird ein einfaches Schema mitgeteilt.

Man verdankt A. Hurwitz[1]) den nachstehenden

Satz 1: Die sämtlichen Wurzeln der reellen algebraischen Gleichung n-ten Grades

$$f_n(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = 0 \quad \ldots \ldots \quad (1)$$

mit $a_0 > 0$ haben dann und nur dann negative Realteile, wenn alle n Hauptunterdeterminanten

$$\tilde{D}_1, \quad \tilde{D}_2, \quad \ldots, \quad \tilde{D}_n \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

der quadratischen Matrix

$$\tilde{\mathfrak{M}} \equiv \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & a_n \end{pmatrix} \quad \ldots \ldots \quad (3)$$

positiv sind; in $\tilde{\mathfrak{M}}$ ist dabei $a_\mu = 0$ zu setzen für $\mu > n$.

Unter Zuhilfenahme einer von E. J. Routh[2]) angegebenen Methode, der sogenannten kreuzweisen Multiplikation, lassen sich die Determinanten (2) mit geringem Aufwand numerisch berechnen. Man geht hierfür von den beiden ersten Spalten der Matrix (3) aus und erhält durch sukzessive Bildung der nach höchstens $n+1$ Schritten abbrechenden Folge von einzeiligen Matrizen

$$\left.\begin{aligned} &[a_0, a_2, a_4, \ldots] - \frac{a_0}{a_1}[a_1, a_3, a_5, \ldots] = [0, b_1, b_3, b_5, \ldots], \\ &[a_1, a_3, a_5, \ldots] - \frac{a_1}{b_1}[b_1, b_3, b_5, \ldots] = [0, c_1, c_3, c_5, \ldots], \\ &[b_1, b_3, b_5, \ldots] - \frac{b_1}{c_1}[c_1, c_3, c_5, \ldots] = [0, d_1, d_3, d_5, \ldots], \\ &[c_1, c_3, c_5, \ldots] - \frac{c_1}{d_1}[d_1, d_3, d_5, \ldots] = [0, e_1, e_3, e_5, \ldots], \ldots \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4),$$

die $\tilde{D}_\nu$ als Produkte:

$$\tilde{D}_1 = a_1, \quad \tilde{D}_2 = a_1 b_1, \quad \tilde{D}_3 = a_1 b_1 c_1, \quad \tilde{D}_4 = a_1 b_1 c_1 d_1, \quad \ldots \ldots \quad (5).$$

Beweis: $\mathfrak{K}$ bezeichne die Substitutionsmatrix [3])

$$\mathfrak{K} \equiv \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_n \end{pmatrix} \quad \ldots \ldots \quad (6)$$

[1]) A. Hurwitz: Über die Bedingungen, unter welchen eine Gleichung nur Wurzeln mit negativen reellen Teilen besitzt. Math. Ann. Bd. 46 (1895), S. 273 bis 284.

[2]) E. J. Routh: Die Dynamik der Systeme starrer Körper, Bd. 2. Leipzig (1898), S. 222 bis 234.

[3]) Im Hinblick auf das Folgende ist der obige, an eine frühere Note des Verfassers (Geometrische Darstellung eines Satzes von Hurwitz für Frequenzgleichungen fünften und sechsten Grades, Z. angew. Math. Mech. Bd. 21 (1941), S. 96 bis 102) sich anschließende Beweis gewählt worden. Vermittels elementarer Determinanteneigenschaften ließe sich auch direkt zeigen, daß die wiederholte Anwendung des Algorithmus (4) die Determinanten (2) in Dreiecksgestalt überführt.

mit

$$\left.\begin{aligned} b_\nu &= a_{\nu+1} && \text{für } \nu \equiv 0 \text{ mod. } 2 \\ b_\nu &= \frac{a_1 a_{\nu+1} - a_0 a_{\nu+2}}{a_1} && \text{für } \nu \equiv 1 \text{ mod. } 2 \\ b_n &= 0 \end{aligned} \quad 0 \leq \nu < n \right\} \quad \ldots \ldots \quad (7);$$

die Ausübung dieser Substitution auf $\tilde{D}_\nu$ liefert

$$\Re(\tilde{D}_\nu) = \frac{\tilde{D}_{\nu+1}}{\tilde{D}_1} \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \quad \ldots \ldots \quad (8).$$

Für $\nu \leq 2$ ist $(5_{1,2})$ wegen

$$\tilde{D}_1 = a_1, \quad \tilde{D}_2 = \tilde{D}_1 \Re(\tilde{D}_1) = a_1 \Re(a_1) = a_1 b_1 \quad \ldots \ldots \quad (9)$$

erfüllt. Durch vollständige Induktion bleibt also zu zeigen, daß

$$\tilde{D}_{\nu+1} = a_1 b_1 c_1 \ldots g_1 h_1 \quad \ldots \ldots \quad (10)$$

wird, wenn für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$

$$\tilde{D}_\nu = a_1 b_1 c_1 \ldots g_1 \quad \ldots \ldots \quad (11)$$

das Produkt der durch (4) gegebenen ν Faktoren $a_1, b_1, c_1, \ldots, g_1$ ist. Weil

$$\left.\begin{aligned} &\Re(a_1) = b_1, \quad \Re(b_1) = \Re(\Re(a_1)) = \frac{b_1 b_2 - b_0 b_3}{b_1} = c_1, \\ &\Re(c_1) = d_1, \ldots, \quad \Re(g_1) = h_1 \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (12)$$

und

$$\Re(a_1 b_1 c_1 \cdot \ldots \cdot g_1) = \Re(a_1) \cdot \Re(b_1) \cdot \Re(c_1) \cdot \ldots \cdot \Re(g_1) = b_1 c_1 d_1 \ldots g_1 h_1 \quad \ldots \ldots \quad (13)$$

gilt, folgt aus (8) die Behauptung:

$$\tilde{D}_{\nu+1} = \tilde{D}_1 \cdot \Re(a_1 b_1 c_1 \ldots g_1) = a_1 b_1 c_1 \ldots g_1 h_1 \quad \ldots \ldots \quad (14).$$

Seit Erscheinen der Hurwitzschen Abhandlung sind für Satz 1 noch weitere Beweise veröffentlicht worden; unter ihnen verdient die originelle und im Gegensatz zu Hurwitz rein arithmetisch-algebraische Beweisführung von I. Schur[4]) besonderes Interesse, da in ihren Hilfssätzen die Koeffizienten von (1) dem Körper der komplexen Zahlen angehören können und die sonst üblichen Hilfsmittel wie Cauchysche Indextheorie, quadratische Formen und Sturmsches Theorem nicht benötigt werden.

In der vorliegenden kleinen Mitteilung soll unter der Voraussetzung komplexer Koeffizienten in (1) — wie sie u. a. bei Stabilitätsuntersuchungen linearer Schwingungssysteme mit phasenverschobenen Kräften auftreten — ein Satz 1 entsprechendes Determinantenkriterium angegeben werden, auf welches der oben beschriebene Algorithmus zur numerischen Berechnung anwendbar bleibt.

Zur Abkürzung heiße eine algebraische Gleichung (mit reellen oder komplexen Koeffizienten), deren sämtliche Wurzeln negative Realteile besitzen, eine Hurwitzsche Gleichung, oder auch kurz eine H-Gleichung.

Dem Polynom n-ten Grades

$$f_n(x) \equiv a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \quad \ldots \ldots \quad (15)$$

mit komplexen Koeffizienten a_ν $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ und $a_0 \neq 0$[5]) werde das Polynom

$$f_n^*(x) \equiv \bar{a}_0 - \bar{a}_1 x + \bar{a}_2 x^2 \mp \cdots + (-1)^n \bar{a}_n x^n \quad \ldots \ldots \quad (16)$$

zugeordnet, wobei $\bar{a}_\nu = a'_\nu - i a''_\nu$ die zu $a_\nu = a'_\nu + i a''_\nu$ konjugiert komplexe Größe bezeichne; ferner sei ξ_n eine beliebige komplexe Zahl mit $\operatorname{Re} \xi_n < 0$ und

$$\varphi_n(x) \equiv \bar{a}_0 x - \bar{a}_1 \xi_n x + \bar{a}_0 \xi_n, \quad \psi_n(x) \equiv a_0 x + a_1 \xi_n x + a_0 \xi_n \quad \ldots \ldots \quad (17).$$

Dann gilt nach Schur[6]):

Satz 2: Es ist

$$f_n(x) \equiv \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu x^\nu = 0 \quad \ldots \ldots \quad (18)$$

---

[4]) I. Schur: Über algebraische Gleichungen, die nur Wurzeln mit negativen Realteilen besitzen. Z. angew. Math. Mech. Bd. 1 (1921), S. 307 bis 311.

[5]) Wir sehen von einer Normierung des Polynoms (15) ab, um die Homogenität in den später auftretenden Formeln nicht zu verletzen.

[6]) Vgl. S. 310 in loc. cit. [4]).

dann und nur dann eine H-Gleichung, wenn

$$a_0 \neq 0, \qquad \operatorname{Re}\left(\frac{a_1}{a_0}\right) > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (19)$$

und die Gleichung $(n-1)$-ten Grades

$$f_{n-1}(x) \equiv x^{-2}\,[f_n \varphi_n - f_n^* \psi_n] \equiv b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_{n-1} x^{n-1} = 0 \quad \ldots \quad (20)$$

eine H-Gleichung ist.

Die Bedingungen (19) lassen sich wegen

$$\operatorname{Re}\left(\frac{a_1}{a_0}\right) = \frac{1}{|a_0|^2} \operatorname{Re} a_1 \bar{a}_0 = \frac{1}{2\,|a_0|^2} (\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1) \quad \ldots \ldots \ldots \quad (21)$$

in die Ungleichung

$$\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1 > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (22)$$

zusammenfassen.

Mit Satz 2 ist ein rekursives Verfahren gegeben, das nach höchstens $(n-1)$-maliger Anwendung zum Abschluß kommt. Wird nämlich Satz 2 auf Gl. (20) angewandt, worin nunmehr

$$f_{n-1}^*(x) \equiv \bar{b}_0 - \bar{b}_1 x + \bar{b}_2 x^2 \mp \cdots + (-1)^{n-1}\, \bar{b}_{n-1} x^{n-1} \quad \ldots \ldots \ldots \quad (23)$$

und bei beliebigem ξ_{n-1} mit $\operatorname{Re} \xi_{n-1} < 0$

$$\varphi_{n-1} \equiv \bar{b}_0 x - \bar{b}_1 \xi_{n-1} x + \bar{b}_0 \xi_{n-1}, \qquad \psi_{n-1} \equiv b_0 x + b_1 \xi_{n-1} x + b_0 \xi_{n-1} \quad \ldots \quad (24)$$

gesetzt werden, so ist (20) genau dann eine H-Gleichung, wenn

$$\bar{b}_0 b_1 + b_0 \bar{b}_1 > 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (25)$$

und

$$f_{n-2}(x) \equiv x^{-2}\,[f_{n-1} \varphi_{n-1} - f_{n-1}^* \psi_{n-1}] \equiv c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_{n-2} x^{n-2} = 0 \quad \ldots \quad (26)$$

eine H-Gleichung ist. Auf diese Weise erhält man für (18) als Verallgemeinerung der bekannten Stabilitätskriterien von **Routh** eine Folge von n Ungleichungen:

$$\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1 > 0, \quad \bar{b}_0 b_1 + b_0 \bar{b}_1 > 0, \quad \bar{c}_0 c_1 + c_0 \bar{c}_1 > 0, \quad \ldots \ldots \quad (27),$$

welche notwendig und hinreichend sind, damit die vorgelegte Gl. (18) eine H-Gleichung sei.

Für die Koeffizienten in (20) findet man

$$\left.\begin{aligned} b_{2\sigma+1} &= (\bar{a}_0 a_{2\sigma+2} - a_0 \bar{a}_{2\sigma+2}) + \xi_n \{(\bar{a}_0 a_{2\sigma+3} + a_0 \bar{a}_{2\sigma+3}) - (\bar{a}_1 a_{2\sigma+2} + a_1 \bar{a}_{2\sigma+2})\}, \\ &\qquad\qquad \left(\sigma = 0, 1, \ldots, \left[\frac{n-1}{2}\right]\right) \\ b_{2\sigma} &= (\bar{a}_0 a_{2\sigma+1} + a_0 \bar{a}_{2\sigma+1}) + \xi_n \{(\bar{a}_0 a_{2\sigma+2} - a_0 \bar{a}_{2\sigma+2}) - (\bar{a}_1 a_{2\sigma+1} - a_1 a_{2\sigma+1})\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (28)$$

und daraus für die entsprechenden Koeffizienten des Polynoms (23):

$$\left.\begin{aligned} -\bar{b}_{2\sigma+1} &= (\bar{a}_0 a_{2\sigma+2} - a_0 \bar{a}_{2\sigma+2}) - \bar{\xi}_n \{(\bar{a}_0 a_{2\sigma+3} + a_0 \bar{a}_{2\sigma+3}) - (\bar{a}_1 a_{2\sigma+2} + a_1 \bar{a}_{2\sigma+2})\}, \\ \bar{b}_{2\sigma} &= (\bar{a}_0 a_{2\sigma+1} + a_0 \bar{a}_{2\sigma+1}) - \bar{\xi}_n \{(\bar{a}_0 a_{2\sigma+2} - a_0 \bar{a}_{2\sigma+2}) - (\bar{a}_1 a_{2\sigma+1} - a_1 \bar{a}_{2\sigma+1})\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (29).$$

Die Ungleichung (25) lautet hiernach

$$\bar{b}_0 b_1 + b_0 \bar{b}_1 \equiv -(\xi_n + \bar{\xi}_n)\,[(\bar{a}_0 a_2 - a_0 \bar{a}_2)^2 + (\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1) \{(\bar{a}_1 a_2 + a_1 \bar{a}_2) - (\bar{a}_0 a_3 + a_0 \bar{a}_3)\}] > 0 \quad (30),$$

wobei über ξ_n mit $\operatorname{Re} \xi_n < 0$ noch beliebig verfügt werden darf. Wählen wir ξ_n negativ reell,

$$\xi_n + \bar{\xi}_n = 2\,\xi_n = 2\,\bar{\xi}_n < 0 \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (31),$$

und setzen bei Berücksichtigung von (22) in (28) und (29)

$$\xi_n = \frac{-1}{2\,(\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1)} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (32),$$

so folgt aus (30)

$$\bar{b}_0 b_1 + b_0 \bar{b}_1 \equiv \frac{(\bar{a}_0 a_2 - a_0 \bar{a}_2)^2 + (\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1) \{(\bar{a}_1 a_2 + a_1 \bar{a}_2) - (\bar{a}_0 a_3 + a_0 \bar{a}_3)\}}{(\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1)} > 0 \quad \ldots \quad (33).$$

Analog erhält man aus den Koeffizienten von (26) für die Bedingung (27_3)

$$\bar{c}_0 c_1 + c_0 \bar{c}_1 \equiv -(\xi_{n-1} + \bar{\xi}_{n-1})\,[(\bar{b}_0 b_2 - b_0 \bar{b}_2)^2 + (\bar{b}_0 b_1 + b_0 \bar{b}_1) \{(\bar{b}_1 b_2 + b_1 \bar{b}_2) - (\bar{b}_0 b_3 + b_0 \bar{b}_3)\}] > 0 \quad (34),$$

worin mit Berücksichtigung von (33)

$$\xi_{n-1} = \frac{-1}{2(\bar{b}_0 b_1 + b_0 \bar{b}_1)} \quad \ldots \ldots \quad (35)$$

gewählt werden kann, so daß

$$\bar{c}_0 c_1 + c_0 \bar{c}_1 \equiv \frac{(\bar{b}_0 b_2 - b_0 \bar{b}_2)^2 + (\bar{b}_0 b_1 + b_0 \bar{b}_1)\{(\bar{b}_1 b_2 + b_1 \bar{b}_2) - (\bar{b}_0 b_3 + b_0 \bar{b}_3)\}}{(\bar{b}_0 b_1 + b_0 \bar{b}_1)} > 0 \quad \ldots \quad (36).$$

Die sukzessive Bildung der weiteren Ungleichungen in (27) ist nach den in (33) und (36) angeschriebenen Ausdrücken evident. Bezeichnet nämlich $\mathfrak{R}$ diejenige Substitution, welche den Koeffizienten a_ν und $\bar{a}_\nu$ die Größen b_ν und $\bar{b}_\nu$ gemäß (28), (29) und (32) zuordnet, so folgen die linken Seiten in (27) durch wiederholte Ausübung von $\mathfrak{R}$ auf (22):

$$\mathfrak{R}(\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1) = \bar{b}_0 b_1 + b_0 \bar{b}_1, \quad \mathfrak{R}(\mathfrak{R}(\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1)) = \mathfrak{R}(\bar{b}_0 b_1 + b_0 \bar{b}_1) = \bar{c}_0 c_1 + c_0 \bar{c}_1, \quad \ldots \quad (37).$$

An Stelle von (22) kann offenbar die Determinantenbedingung

$$D_1 \equiv \begin{vmatrix} a_0 & -i\bar{a}_0 \\ -i a_1 & \bar{a}_1 \end{vmatrix} > 0 \quad \ldots \ldots \quad (38)$$

treten; wegen (38) und

$$D_2 \equiv \begin{vmatrix} a_0 & -i\bar{a}_0 & 0 & 0 \\ -i a_1 & \bar{a}_1 & a_0 & -i\bar{a}_0 \\ -a_2 & i\bar{a}_2 & -i a_1 & \bar{a}_1 \\ i a_3 & -\bar{a}_3 & -a_2 & i\bar{a}_2 \end{vmatrix} = \left.\begin{aligned} &(\bar{a}_0 a_2 - a_0 a_2)^2 \\ &+ (\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1)\{(\bar{a}_1 a_2 + a_1 \bar{a}_2) - (\bar{a}_0 a_3 + a_0 \bar{a}_3)\} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \quad (39)$$

wird

$$\bar{b}_0 b_1 + b_0 \bar{b}_1 = \frac{D_2}{D_1} \quad \ldots \ldots \quad (40)$$

und daher (33) äquivalent zu

$$D_2 > 0 \quad \ldots \ldots \quad (41).$$

Um zu einem allgemeinen Bildungsgesetz zu gelangen, betrachten wir die $2n$-reihige quadratische Matrix

$$\mathfrak{M} \equiv \begin{pmatrix} a_0 & -i\bar{a}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ -i a_1 & \bar{a}_1 & a_0 & -i\bar{a}_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ -a_2 & i\bar{a}_2 & -i a_1 & \bar{a}_1 & a_0 & -i\bar{a}_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ i a_3 & -\bar{a}_3 & -a_2 & i\bar{a}_2 & -i a_1 & \bar{a}_1 & a_0 & -i\bar{a}_0 & \cdot & \cdot \\ a_4 & -i\bar{a}_4 & i a_3 & -\bar{a}_3 & -a_2 & i\bar{a}_2 & -i a_1 & \bar{a}_1 & \cdot & \cdot \\ -i a_5 & \bar{a}_5 & a_4 & -i\bar{a}_4 & i a_3 & -\bar{a}_3 & -a_2 & i\bar{a}_2 & \cdot & \cdot \\ -a_6 & i\bar{a}_6 & -i a_5 & \bar{a}_5 & a_4 & -i\bar{a}_4 & i a_3 & -\bar{a}_3 & \cdot & \cdot \\ i a_7 & -\bar{a}_7 & -a_6 & i\bar{a}_6 & -i a_5 & \bar{a}_5 & a_4 & -i\bar{a}_4 & \cdot & \cdot \\ a_8 & -i\bar{a}_8 & i a_7 & -\bar{a}_7 & -a_6 & i\bar{a}_6 & -i a_5 & \bar{a}_5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & i^{n-1}\bar{a}_n \end{pmatrix} \quad \ldots \quad (42),$$

worin $a_\nu = 0$ zu setzen ist für $\nu > n$. Von unwesentlichen Faktoren abgesehen, wird ihre Determinante D_n gleich der Resultanten der beiden Polynome $f(ix)$ und $-i\bar{f}(-ix) \equiv -i f^*(ix)$. Die Folge der Hauptunterdeterminanten aus (42) sei mit

$$\hat{D}_0,\ D_1,\ \hat{D}_1,\ D_2,\ \hat{D}_2,\ D_3,\ \ldots,\ \hat{D}_{n-1},\ D_n \quad \ldots \ldots \quad (43)$$

bezeichnet; für reelle a_ν sind diese Determinanten mit den Hurwitzschen $\tilde{D}_\nu$ aus (2) durch die Identitäten

$$D_\nu = 2^\nu a_0 \tilde{D}_{\nu-1} \tilde{D}_\nu, \quad \hat{D}_\nu = (-2i)^\nu a_0 \tilde{D}_\nu^2 \qquad (\nu = 1, \ldots, n-1) \quad \ldots \quad (44)$$

verknüpft.

Nach (40) wird

$$\mathfrak{R}(D_1) = \begin{vmatrix} b_0 & -i\bar{b}_0 \\ -i b_1 & \bar{b}_1 \end{vmatrix} = \frac{D_2}{D_1} \quad \ldots \ldots \quad (45)$$

und analog (8) gilt allgemein für $\nu = 1, 2, \ldots, n-1$ die elementar, aber nicht kurz zu beweisende Relation

$$\Re(D_\nu) = \frac{D_{\nu+1}}{D_1} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (46).$$

Die linken Seiten der Ungleichungen (27) werden, falls noch $D_0 = 1$ gesetzt wird, die Quotienten zweier Determinanten:

$$\bar{a}_0 a_1 + a_0 \bar{a}_1 = \frac{D_1}{D_0}, \quad \bar{b}_0 b_1 + b_0 \bar{b}_1 = \frac{D_2}{D_1}, \quad \bar{c}_0 c_1 + c_0 \bar{c}_1 = \frac{D_3}{D_2}, \quad \ldots \ldots \ldots \quad (47),$$

und wir erhalten in Verbindung mit (46) durch vollständige Induktion als Verallgemeinerung des Hurwitzschen Satzes den

Satz 3: Die algebraische Gleichung n-ten Grades (18) mit beliebigen komplexen Koeffizienten a_ν und $a_0 \neq 0$ ist dann und nur dann eine H-Gleichung, wenn alle Hauptunterdeterminanten gerader Ordnung

$$D_1, \; D_2, \; D_3, \; \ldots, \; D_n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (48)$$

der Matrix $\mathfrak{M}$ positiv sind.

Dieser Satz liefert wie Satz 1 n Determinantenbedingungen[7]). Im Vergleich zu den Hurwitzschen $\tilde{D}_\nu$ hat sich dabei die Ordnung der D_ν entsprechend den zwei Komponenten a'_ν, a''_ν der Koeffizienten a_ν verdoppelt. Die Determinanten $\hat{D}_\nu$ in der Folge (43) sind im allgemeinen komplexwertig und von Null verschieden; da Satz 3 über sie keine Aussage enthält, kann ihre Berechnung unterbleiben.

Das für die Berechnung der $\tilde{D}_\nu$ aus Satz 1 gültige Rechenschema ist, wie wir nunmehr zeigen wollen, auf unsere D_ν übertragbar. Durch einfache Umformung erhält nämlich D_ν die Gestalt

$$D_\nu = 2^\nu \cdot \begin{vmatrix} a'_0 & -a''_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ a''_1 & a'_1 & a'_0 & -a''_0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot \\ -a'_2 & a''_2 & a''_1 & a'_1 & a'_0 & -a''_0 & \cdot & \cdot \\ -a''_3 & -a'_3 & -a'_2 & a''_2 & a''_1 & a'_1 & \cdot & \cdot \\ a'_4 & -a''_4 & -a''_3 & -a'_3 & -a'_2 & a''_2 & \cdot & \cdot \\ a''_5 & a'_5 & a'_4 & -a''_4 & -a''_3 & -a'_3 & \cdot & \cdot \\ -a'_6 & a''_6 & a''_5 & a'_5 & a'_4 & -a''_4 & \cdot & \cdot \\ -a''_7 & -a'_7 & -a'_6 & a''_6 & a''_5 & a'_5 & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix} \equiv 2^\nu \cdot d_\nu \quad \ldots \quad (49),$$

wonach die Hauptunterdeterminanten gerader Ordnung der Matrix $\mathfrak{M}$ sich von den entsprechenden Hauptunterdeterminanten gerader Ordnung der Determinante d_n nur durch positive Faktoren unterscheiden, welche bei anderer Wahl der ξ_ν aus Satz 2 nicht aufgetreten wären und im folgenden beiseite gelassen werden können. Beiläufig sei bemerkt, daß zwischen den $\hat{D}_\nu$ und den Hauptunterdeterminanten ungerader Ordnung aus d_n, welche wir in Analogie zu (43) mit $\hat{d}_0, \hat{d}_1, \ldots, \hat{d}_{n-1}$ bezeichnen wollen, keine derartige Beziehung besteht.

Um festzustellen, ob eine vorgelegte Gleichung den Bedingungen aus Satz 3 genügt, ist ohne Beschränkung der Allgemeinheit also notwendig und hinreichend, daß alle n Determinanten gerader Ordnung

$$d_1, \; d_2, \; \ldots, \; d_n \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (50)$$

positiv werden. Weil diese Determinanten prinzipiell den gleichen Aufbau wie die D_ν aus (2) haben, wird die eingangs mitgeteilte Rechenvorschrift anwendbar, welche sich folgendermaßen aussprechen läßt:

Die von oben nach unten gelesenen Elemente der zweiten Spalte in d_n werden von links nach rechts als Horizontalreihe geschrieben und darunter als zweite Zeile die entsprechenden Elemente der ersten Spalte gesetzt. Die Elemente dieser zweiten Zeile multipliziere man mit

[7]) Mit Hilfe des Sturmschen Satzes ließe sich überdies zeigen, daß die Anzahl der Zeichenwechsel in der Folge $D_1 (>0)$, $D_2, \ldots, D_n$ für eine beliebige komplexe Gleichung n-ten Grades gleich der Anzahl der Wurzeln mit positivem Realteil ist. Nach eventueller Elementartransformation der unabhängigen Veränderlichen könnten die D_ν also auch zur Bestimmung der Anzahl der in einer von $\mathrm{Re}\, x < 0$ verschiedenen Halbebene oder der in einem Quadranten der komplexen Ebene gelegenen Wurzeln verwandt werden. Ein diesbezügliches determinantenfreies Kriterium für die Halbebene $Im\, x > 0$ wurde kürzlich von H. Wielandt angegeben.

einer Zahl m_1 derart, daß nach gliedweiser Addition dieser Produkte zu den darüberstehenden Zahlen der ersten Zeile die Summe der ersten Glieder Null wird. Diese wird fortgelassen und die Summen aus den anderen Elementen, um einen Platz nach links versetzt, als dritte Zeile angeschrieben. Mit der zweiten und dritten Zeile dieses Schemas wird nun das Verfahren wiederholt: man multipliziere die Werte der dritten Zeile mit einer Zahl m_2, so daß bei gliedweiser Addition dieser Produkte zu den darüberstehenden Zahlen der zweiten Zeile die Summe der ersten Glieder Null wird. Das Ergebnis aus den anderen Elementen wird — ohne die Null an erster Stelle — um einen Platz nach links versetzt, als vierte Zeile aufgeschrieben, usw. Spätestens mit der $(2n+2)$-ten Zeile ist das Verfahren beendet; ein vorzeitiges Abbrechen kommt bei H-Gleichungen nicht vor, und bei ausnahmsweisem Auftreten in anderen Gleichungen läßt es sich durch geringe Abänderung der numerisch gegebenen Koeffizienten vermeiden[8]).

Die aus diesem Algorithmus resultierenden Elemente der ersten Spalte seien mit δ_0, $\hat{\delta}_0$, δ_1, $\hat{\delta}_1$, δ_2, $\hat{\delta}_2$, …, $\hat{\delta}_{n-1}$, δ_n, $\hat{\delta}_n \equiv 0$ bezeichnet. Die Hauptunterdeterminanten von d_n folgen daraus durch fortgesetzte Produktbildung:

$$\left.\begin{array}{lllll} \hat{d}_0 = \hat{\delta}_0, & \underline{d_1 = \hat{d}_0\,\delta_1,} & \hat{d}_1 = d_1\,\hat{\delta}_1, & \underline{d_2 = \hat{d}_1\,\delta_2,} & \hat{d}_2 = d_2\,\hat{\delta}_2, \\ \ldots, \quad \underline{d_s = \hat{d}_{s-1}\,\delta_s,} & \hat{d}_s = d_s\,\hat{\delta}_s, & \ldots, & \hat{d}_{n-1} = d_{n-1}\,\hat{\delta}_{n-1}, & \underline{d_n = \hat{d}_{n-1}\,\delta_n} \end{array}\right\} \quad (51).$$

Für eine H-Gleichung der Form (18) müssen nach (50) alle n unterstrichenen Ausdrücke positiv werden.

Abschließend folge hierzu ein Beispiel: Gegeben sei die Gleichung fünften Grades

$$\left.\begin{array}{l} f(x) \equiv x^5 + (10+3i)\,x^4 + (44+19i)\,x^3 + (114+45i)\,x^2 \\ \quad + (171+73i)\,x + (140+20i) = 0 \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots (52).$$

Das oben beschriebene Rechenverfahren liefert für diese vorgelegte Gleichung das Schema:

						m_ν
— 20	171	45	— 44	— 3	1	
140	73	— 114	— 19	10	0	0,1428
181,429	28,714	— 46,714	— 1,571	1		— 0,7717
50,843	— 77,953	— 17,788	9,228			— 3,5684
306,883	16,761	— 34,500	1			— 0,1657
— 80,730	— 12,072	9,062				3,8014
— 29,129	— 0,052	1				— 2,7715
— 11,928	6,291					— 2,4421
— 15,415	1					— 0,7738
5,517						2,7941
1						— 5,5170
0						

Mit den Werten der ersten Spalte

δ_0	$\hat{\delta}_0$	δ_1	$\hat{\delta}_1$	δ_2	$\hat{\delta}_2$	δ_3	$\hat{\delta}_3$	δ_4	$\hat{\delta}_4$	δ_5	$\hat{\delta}_5$
— 20	140	181,429	50,843	306,883	— 80,730	— 29,129	— 11,928	— 15,415	5,517	1	0

erhält man nach (51)

$$\hat{d}_0 > 0,\ \underline{d_1 > 0,}\ \hat{d}_1 > 0,\ \underline{d_2 > 0,}\ \hat{d}_2 < 0,\ \underline{d_3 > 0,}\ \hat{d}_3 < 0,\ \underline{d_4 > 0,}\ \hat{d}_4 > 0,\ \underline{d_5 > 0,}$$

wonach (52) als H-Gleichung erkannt ist; ihre Wurzeln $x_\nu = x'_\nu + i\,x''_\nu$ sind

ν	1	2	3	4	5
x'_ν	— 1	— 1	— 1	— 3	— 5
x''_ν	1	2	— 2	— 4	0

haben also in der Tat nur negative Realteile.

[8]) Für den Anlauf der numerischen Rechnung ist zu beachten, daß in Gl. (18) — nach evtl. Multiplikation mit einer von Null verschiedenen (komplexen) Konstanten — die Voraussetzung $a_0 \neq 0$ durch $a_0' \neq 0$ ersetzt werden kann.

Eingegangen am 7. 12. 1943.

KLEINE MITTEILUNGEN

Allgemeine Zerlegung der Beschleunigung des komplan bewegten starren ebenen Systems. 1. Aufgabenstellung. Es sind verschiedene spezielle Zerlegungen des Beschleunigungsvektors b_A eines beliebigen Systempunktes A des allgemein bewegten ebenen starren Systems angegeben worden, von denen die von A. Schell[1]) und M. Grübler[2]) am bekanntesten sind. Die erstere wird durch die Gleichung $b_A = b_1 + b_2$, die letztere durch $b_A = b_\varepsilon + b_\omega$ [3]) dargestellt, worin mit P als Drehpol und T als Tangentialpol $b_1 = (AP)\,\omega^2$, $b_2 = (AT)\,\varepsilon$, während mit W als Wendepol $b_\varepsilon = (AP)\,\varepsilon$ und $b_\omega = (AW)\,\omega^2$ [4]). ω bedeutet, wie üblich, die Winkelgeschwindigkeit, $\varepsilon = \dot\omega$ die Winkelbeschleunigung des komplan bewegten ebenen Systems. b_ε ist unter dem Namen „Triebbeschleunigung", b_ω als „Wendebeschleunigung" bekannt. Beiden Zerlegungsarten ist offenbar gemeinsam, daß die eine der beiden Beschleunigungskomponenten als relative Normalbeschleunigung des Systempunktes A gegen einen anderen Systempunkt (P bei b_1 bzw. W bei b_ω), die andere als relative Tangentialbeschleunigung gegen einen weiteren Systempunkt (T bei b_2 bzw. P bei b_ε) gedeutet werden kann. Diese Zerlegungsart ist einer weitgehenden Verallgemeinerung fähig derart, daß sich zu einem beliebigen Systempunkt M stets ein weiterer Systempunkt N so angeben läßt, daß $b_A = n_{AM} + t_{AN}$ mit $n_{AM} = (AM)\,\omega^2$, $t_{AN} = (AN)\,\varepsilon$ nach der Bezeichnungsweise von F. Wittenbauer[3]) ist. Es soll der Zweck dieser Arbeit sein, die Zuordnung der Punkte N zu den Punkten M anzugeben.

2. Synthetische Begründung. In Bild 1 bedeutet neben den bereits erwähnten Polen P, W, T, noch Q den Beschleunigungspol und A einen beliebigen Systempunkt, dessen Beschleunigung $\bar b_A = \overline{AA_1}$ mit $\overline{AQ}$ den „Beschleunigungswinkel" ψ einschließt, wobei $\sphericalangle \psi = \sphericalangle PTW$ ist. Zur Auftragung aller Längen sei in Bild 1 ein Längenmaßstab (1^{cm} der Zeichnung $= a^{m}$ der Natur) und zur Auftragung aller Beschleunigungen ein Beschleunigungsmaßstab (1^{cm} der Zeichnung $= \gamma^{\text{m/sek}^2}$ der Natur) angenommen.[4]) Dann ist

$$\overline{AQ_1} = (AQ)\,\frac{\omega^2}{\gamma} \quad \text{und} \quad \overline{AR_1} = (AQ)\cdot\frac{\varepsilon}{\gamma}\,.$$

Ist nun ein beliebiger Systempunkt M gewählt und durch Q_1 die zu $\overline{QM}$ parallele Gerade $\overline{Q_1M_1}$ bis zum Schnitte M_1 mit $\overline{AM}$ gezogen, so wird durch $\overline{AM_1}$ im gewählten Beschleunigungsmaßstabe γ offenbar

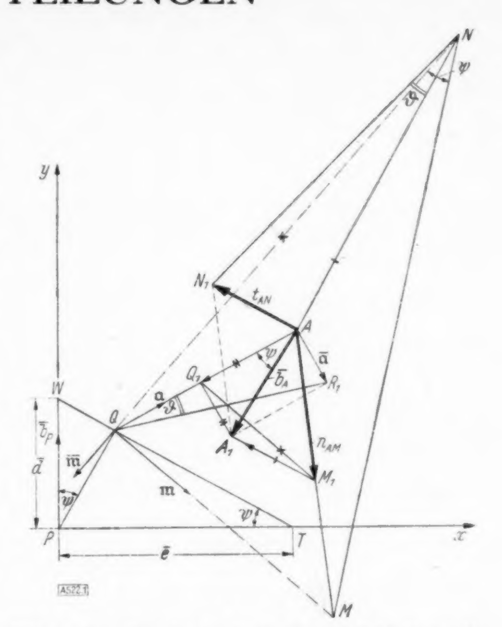


Bild 1. Zum Beweis der Zerlegungsmöglichkeit des Beschleunigungsvektors b_A in $n_{AM} + t_{AN}$ und Konstruktion der Punkte N zu vorgegebenen Punkten M.

die Beschleunigung $(AM)\,\omega^2$ dargestellt, die als die eine der eingangs erwähnten Beschleunigungskomponenten aufgefaßt werden soll. Da $\bar b_A = \overline{AA_1} = \overline{AM_1} + \overline{M_1A_1}$, so ist $\overline{M_1A_1}$ nach Richtung, Sinn und Größe (im gewählten Beschleunigungsmaßstab γ) offenbar die zweite Komponente, die im Systempunkt A aufgetragen, durch die Strecke $\overline{AN_1}$ dargestellt wird. Soll diese Komponente nun als relative Tangentialbeschleunigung gegen einen weiteren Systempunkt N aufgefaßt werden, so muß N auf einem Halbstrahl $\overline{AN} \perp \overline{AN_1}$ offenbar in solcher Entfernung von A angenommen werden, daß von ihm aus gesehen die Strecke $\overline{AN_1}$ unter dem sogenannten „Winkelbeschleunigungswinkel" ϑ und zwar im selben Sinne drehend erscheint, wie die Beschleunigungskomponente $\overline{AR_1} = (AQ)\,\frac{\varepsilon}{\gamma}$ um den Beschleunigungspol Q dreht. In Bild 1 fällt dieser Drehsinn mit dem Uhrzeigersinn zusammen, weshalb N auf dem nach oben gerichteten Halbstrahle $\overline{AN}$ liegen muß. Es ist nämlich tg ϑ der Winkelbeschleunigung ε direkt proportional und der Proportionalitätsfaktor ist hierbei nur von den Maßstabskonstanten a^{m} und $\gamma^{\text{m/sek}^2}$ abhängig. Aus dem ΔQAR_1 folgt nämlich sofort:

$$\operatorname{tg}\vartheta = \frac{\overline{AR_1}}{\overline{AQ}} = \frac{(AQ)\,\varepsilon:\gamma}{(AQ):a} = \frac{a^{m}}{\gamma^{\text{m/sek}^2}}\cdot\varepsilon^{\text{sek}^{-2}} \quad . \; . \quad (1).$$

Ferner ist bekanntlich die Beschleunigung b_P des Drehpoles P, die im Wendedurchmesser d liegt und die Richtung $\overline{PW}$ besitzt, durch die Beziehung $b_P = d\,\omega^2 = e\,\varepsilon$ gegeben, woraus

$$\frac{\omega^2}{\varepsilon} = \frac{e}{d} = \frac{\bar e}{\bar d} = \cot\psi \quad . \; . \; . \; . \quad (2)$$

folgt, worin wieder die überstrichenen Größen sich auf die Strecken der Zeichnung beziehen.

---

[1]) W. Schell: Über den Beschleunigungszustand des ebenen unveränderlichen, in der Ebene beweglichen Systems, Schlömilchs Z. Math. Phys. Bd. 19 (1871), S. 185; ferner W. Schell: Theorie der Bewegung und der Kräfte, 1. Bd. 2. Aufl. Leipzig (1879), S. 441 bis 474.

[2]) M. Grübler: Getriebelehre, 1. Aufl. Berlin 1917, S. 126 ff.

[3]) R. Beyer: Technische Kinematik, Leipzig 1931, S. 240, 241. Man vgl. auch F. Wittenbauer: Graphische Dynamik, Berlin 1923, S. 38, 39. Die Bezeichnungsweise ist zunächst der des Buches von R. Beyer angeschlossen.

[4]) Es werden stets die natürlichen Längen in Klammern, z. B. $(AP)^m$, ihre zeichnerischen Bilder aber durch Querstriche, z. B. $\overline{AP}$ zur Darstellung gebracht, so daß also $(AP)^m = \overline{AP}\cdot a^m$ ist. $\overline{AP}$ bedeutet also die dimensionslose Anzahl der cm, in der in der Zeichnung mittels des Längenmaßstabes a^m die wirkliche Länge $(AP)^m$ zur Darstellung gelangt. Analoges gilt für die Beschleunigungen: Es ist z. B.

$$b_A^{\text{m/sek}^2} = (AQ)^m\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}^{\,\text{sek}^{-2}} = \overline{AQ}\,a^m\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}^{\,\text{sek}^{-2}}.$$

Daher ist das graphische Bild

$$\bar b_A = \overline{AA_1} = b_A/\gamma = \overline{AQ}\cdot a^m/\gamma^{\text{m/sek}^2}\sqrt{\omega^4+\varepsilon^2}^{\,\text{sek}^{-2}},$$

somit, wie es sein muß, eine dimensionslose Zahl. Hinsichtlich der Maßstäbe vgl. man Abschnitt 2.

Ferner ist $\Delta A_1 Q_1 M_1 \sim \Delta A Q N$, denn es ist $\overline{Q_1 A_1} = \overline{A R_1} = \overline{AQ} \operatorname{tg} \vartheta$ [Gl. (1)] und $\perp \overline{AQ}$ (in Bild 1 zweimal gestrichen) und

$$\overline{M_1 A_1} = \overline{A N_1} = \overline{AN} \operatorname{tg} \vartheta \text{ und } \perp \overline{AN}$$

(in Bild 1 einmal gestrichen), woraus zunächst folgt:

$$\sphericalangle Q_1 A_1 M_1 = \sphericalangle Q A N .$$

Ferner muß auch $\overline{M_1 Q_1} = \overline{NQ} \operatorname{tg} \vartheta$ und $\perp \overline{NQ}$ sein (in Bild 1 gekreuzt), also auch $\overline{MQ} \perp \overline{NQ}$. Ferner ist, da

$$\overline{AQ_1} = (AQ) \frac{\omega^2}{\gamma} \quad \text{und} \quad \overline{AM_1} = (AM) \frac{\omega^2}{\gamma},$$

auch

$$\overline{M_1 Q_1} = (MQ) \frac{\omega^2}{\gamma} = \overline{MQ}\, \alpha \frac{\omega^2}{\gamma} .$$

Somit folgt durch Gleichsetzung der beiden für $\overline{M_1 Q_1}$ gewonnenen Ausdrücke und wegen (1)

$$\overline{M_1 Q_1} = \overline{MQ}\, \alpha \frac{\omega^2}{\gamma} = \overline{NQ} \operatorname{tg} \vartheta = \overline{NQ} \frac{\alpha}{\gamma} \varepsilon .$$

Daraus folgt nun bei Beachtung von (2):

$$\left.\begin{aligned} &\overline{NQ} = \overline{MQ} \frac{\omega^2}{\varepsilon} = \overline{MQ} \frac{\bar{e}}{\bar{d}} = \overline{MQ} \cot \psi , \\ &\overline{NQ} \perp \overline{MQ} \text{ im Gegensinne von } \varepsilon \end{aligned}\right\} \qquad (3).$$

Man vgl. Bild 1, wo $\sphericalangle \psi = MNQ$ bei N zur Kontrolle eingezeichnet worden ist. Man kann die durch (3) angegebene Zuordnung der Punkte N zu den gewählten Punkten M so formulieren:

Die Punkte N werden aus den Punkten M durch eine einfache Drehstreckung um den Beschleunigungspol Q gewonnen, wobei die Drehung um 90° im Gegensinne der Winkelbeschleunigung ε, die Streckung aber im Verhältnis des Gleichenkreisdurchmessers e zum Wendekreisdurchmesser d erfolgt.

3. Vektorieller Nachweis. Dieser gestaltet sich besonders einfach. Ist nämlich (Bild 1) $\mathfrak{a}$ ein Einheitsvektor in Richtung $\overline{QA}$ und $\mathfrak{m}$ ein solcher in Richtung $\overline{QM}$, so ist offenbar, wenn alle Summen vektoriell aufgefaßt werden,

$$(AM) = (AQ) + (QM)$$

und daher

$$\overline{AM_1} = \frac{(AM)\,\omega^2}{\gamma} = \frac{-\mathfrak{a}(QA) + \mathfrak{m}(QM)}{\gamma}\,\omega^2,$$

während mit $\bar{\mathfrak{a}}$ als Einheitsvektor $\perp \mathfrak{a}$ (Bild 1) offenbar:

$$\bar{b}_A =$$
$$\overline{AA_1} = \overline{AQ_1} + \overline{AR_1} = -\mathfrak{a} \frac{(QA)\,\omega^2}{\gamma} + \bar{\mathfrak{a}} \frac{(QA)\,\varepsilon}{\gamma},$$

so daß folgt:

$$\overline{M_1 A_1} =$$
$$\overline{AN_1} = \bar{b}_A - \overline{AM_1} = -\mathfrak{m} \frac{(QM)\,\omega^2}{\gamma} + \bar{\mathfrak{a}} \frac{(QA)\,\varepsilon}{\gamma} .$$

Ist ferner $\bar{\mathfrak{m}}$ ein weiterer Einheitsvektor $\perp \mathfrak{m}$, so folgt wegen $\overline{AN} = \overline{AN_1} \cot \vartheta$ und weil $\overline{AN} \perp \overline{AN_1}$ und aus AN_1 im Sinne von ε gedreht werden muß mit Beachtung von (1)

$$\overline{AN} = \left[-\bar{\mathfrak{m}} \frac{(QM)\,\omega^2}{\gamma} - \mathfrak{a} \frac{(QA)\,\varepsilon}{\gamma}\right] \frac{\gamma}{\alpha} \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$
$$= -\bar{\mathfrak{m}} \frac{(QM)\,\omega^2}{\varepsilon\,\alpha} - \mathfrak{a} \frac{(QA)}{\alpha}$$

und daher wegen (2)

$$Q\bar{N} = \overline{QA} + \overline{AN} = -\bar{\mathfrak{m}} \frac{(QM)\,\omega^2}{\varepsilon\,\alpha} = -\bar{\mathfrak{m}} \cdot \overline{QM} \cdot \frac{e}{d}$$

w. z. b. w.[5])

4. Allgemeine Folgerungen und spezielle Zerlegungen des Beschleunigungsvektors. Aus den in Bild 1 angegebenen Koordinaten des Wendepoles W und Tangentialpoles T folgt $\overline{PQ} = \dfrac{\bar{e}\,\bar{d}}{\sqrt{\bar{e}^2 + \bar{d}^2}}$ und somit wegen $\operatorname{tg} \psi = \dfrac{\bar{d}}{\bar{e}}$ [Gl. (2)] für die Koordinaten von Q:

$$\left.\begin{aligned} \bar{x}_Q &= \overline{PQ} \sin \psi = \frac{\bar{e}\,\bar{d}^2}{\bar{e}^2 + \bar{d}^2} ; \\ \bar{y}_Q &= \overline{PQ} \cos \psi = \frac{\bar{e}^2\,\bar{d}}{\bar{e}^2 + \bar{d}^2} \end{aligned}\right\} \quad \ldots \ldots \quad (4).$$

Führt man (4) in die aus Bild 1 ersichtlichen Beziehungen, wobei in den Zählern die Koordinaten der Punkte Q, M, N erscheinen, nämlich in:

$$\frac{\bar{x}_N - \bar{x}_Q}{\overline{QN}} = \frac{\bar{y}_Q - \bar{y}_M}{\overline{QM}} \quad \text{und} \quad \frac{\bar{y}_N - \bar{y}_Q}{\overline{QN}} = \frac{\bar{x}_M - \bar{x}_Q}{\overline{QM}}$$

ein und beachtet (2), so folgt nach einigen Kürzungen für die Koordinaten $\bar{x}_N$ und $\bar{y}_N$ des Punktes N

$$x_N = e - y_M \frac{e}{d}, \qquad y_N = x_M \frac{e}{d} \quad . \; . \; . \; . \quad (5),$$

das nicht nur für die Zeichnungsgrößen, sondern ebenso auch für die natürlichen Abmessungen, wie man leicht einsieht, gilt, so daß in (5) die Querstriche sämtlich gleich fortgelassen wurden.

Beschreibt M eine Gerade, so folgt dies auch für N, wie sich schon aus dem Begriffe der Drehstreckung ergibt. Wandert insbesondere M auf der y-Achse, so bewegt sich N auf der x-Achse, denn aus (5) folgt für $x_M = 0$ sofort $y_N = 0$. Ist überdies $y_M = 0$, so folgt $x_N = e$, d. h., wenn M in den Drehpol P fällt, so liegt N im Tangentialpol T und wir haben die eingangs erwähnte W. Schellsche Zerlegung der Beschleunigung vor uns. Ist aber neben $x_M = 0$ noch $y_M = d$, so folgt aus (5) neben $y_N = 0$ sofort $x_N = 0$, d. h. die Koinzidenz von M mit dem Wendepole W bedingt die von N mit dem Drehpole P und wir haben die eingangs erwähnte M. Grüblersche Zerlegung erhalten. Ist schließlich $y_M = \dfrac{d}{2}$, so ist $x_N = \dfrac{e}{2}$, woraus der Satz folgt:

Jede Systembeschleunigung läßt sich in zwei Komponenten zerlegen, von denen die eine als relative Normalbeschleunigung gegen den Mittelpunkt des Wendekreises, die andere als relative Tangentialbeschleunigung gegen den Mittelpunkt des Tangentialkreises aufgefaßt werden kann.

[5]) Ein analytischer Nachweis, der sich ebenfalls unschwer führen läßt, möge hier wegen Raumersparnis unterdrückt werden. Ein anderer synthetischer Beweis rührt, wie ich einer frdl. schriftlichen Mitteilung entnehmen konnte, von Herrn Dr. R. Beyer her: Er wird in der Zeitschr. „Getriebetechnik" mitgeteilt werden.

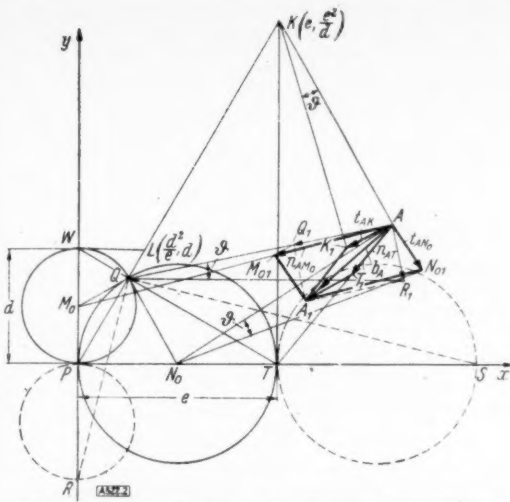


Bild 2. Spezielle Zerlegung des Beschleunigungsvektors b_A: 1. in $n_{AM_0} + t_{AN_0}$ 2. in $n_{AT} + t_{AK}$.

In Bild 2 ist diese Zerlegung der Beschleunigung $\overline{AA_1} = \overline{AQ_1} + \overline{AR_1}$ durchgeführt: $\overline{Q_1 M_{01}} \parallel \overline{QM_0}$ ergibt $n_{AM_0} = \overline{AM_{01}}$ während $\overline{M_{01} A_1} = \overline{AN_{01}} = t_{AN_0}$ ist und daher vom Mittelpunkt N_0 des Tangentialkreises unter dem $\sphericalangle \vartheta$ erscheint, wobei $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{\overline{AR_1}}{\overline{AQ}}$ ist; außerdem muß $\overline{AN_{01}} \perp \overline{AN_0}$ sein, was als weitere Kontrolle dienen kann. Aus (5) folgert man ferner leicht den Satz:

Beschreibt M eine x- (y)-Parallele, so beschreibt N eine y- (x-)Parallele und umgekehrt.

Beschreibt ferner M einen Kreis, so tut dies auch N, wobei die Mittelpunkte nach (5) transformiert und die Halbmesser im Verhältnis $\frac{e}{d}$ vergrößert werden. Beschreibt insbesondere M den Wendekreis, so beschreibt N den Tangentialkreis. Beschreibt M den Rückkehrkreis, so beschreibt N den Kreis mit dem Durchmesser $\overline{TS}$, der durch Spiegelung des Tangentialkreises an seiner Tangente durch T entsteht und der samt dem Rückkehrkreis in Bild 2 strichliert eingezeichnet wurde. Liegt M insbesondere im Rückkehrpol R, so liegt N im Punkte S auf der Abszissenachse, somit in der Entfernung $2e$ vom Drehpol P, ein Ergebnis, das auch sofort aus (5) gefolgert werden kann.

Liegt schließlich M im Tangentialpol T, so liegt N im Punkte $K\left(e, \frac{e^2}{d}\right)$, der im Schnitte der y-Parallelen durch T mit der Verbindungslinie $\overline{PQ}$ von Dreh- und Beschleunigungspol erhalten wird. Liegt jedoch N im Wendepol W, so liegt M im Punkte $L\left(\frac{d^2}{e}, d\right)$, der wieder im Schnitt der x-Parallelen durch W mit $\overline{PQ}$ gefunden wird.

Alle diese Zerlegungen lassen sich leicht durch Sätze analog dem oben für die Zerlegung $M_0 - N_0$ ausgesprochenen formulieren, wobei man bloß die Bezugspunkte entsprechend einzusetzen hat. Natürlich können derartige Zerlegungen in beliebiger Zahl angegeben werden. Die Zerlegung der Beschleunigung

$$\bar{b}_A = \overline{AA_1} = \overline{AT_1} + \overline{T_1 A_1}; \quad (\overline{T_1 A_1} = \overline{AK_1})$$

in n_{AT} und t_{AK} ist in Bild 2 eingezeichnet worden, wobei die in Bild 2 der Deutlichkeit halber nicht gezeichnete Gerade $\overline{Q_1 T_1} \parallel \overline{QT}$ ist.

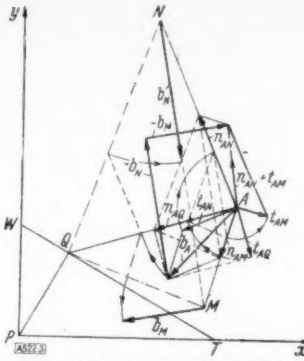


Bild 3. Zur Konstruktion der Beschleunigungskomponenten n_{AN} und t_{AM} und deren Summe $n_{AN} + t_{AM}$.

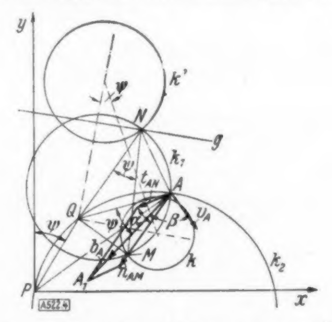


Bild 4. Zur Lösung der Aufgabe: A zu suchen, wenn $\sphericalangle (n_{AM}, t_{AN}) = \alpha$, $\sphericalangle (b_A, v_A) = \beta$ vorgeschrieben sind und M auf k, N auf g liegen soll

Zum Schlusse möge bemerkt werden, daß man auch die relative Tangentialbeschleunigung t_{AM} von A gegen M und die relative Normalbeschleunigung n_{AN} von A gegen N leicht finden kann: Ihre Summe ist freilich nicht b_A, sondern $b_A - b_M - b_N$ wie man folgendermaßen leicht zeigen kann: Es bestehen die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned} b_A &= b_M + n_{AM} + t_{AM} \\ b_A &= b_N + n_{AN} + t_{AN} \\ \hline 2\,b_A &= b_M + b_N + (n_{AM} + t_{AN}) + n_{AN} + t_{AM}. \end{aligned}$$

Im Additionsergebnis ist der Klammerausdruck, wie bewiesen, aber selbst b_A, so daß

$$b_A - b_M - b_N = n_{AN} + t_{AM}$$

folgt, wobei natürlich sämtliche Additionen vektoriell zu verstehen sind. Außerdem ist $b_M \perp b_N$ (da $\overline{QM} \perp \overline{QN}$) und $\bar{b}_N$ fällt in die Richtung $\overline{NM}$. Es gelten somit die Zerlegungen:

$$\left.\begin{aligned} n_{AM} + t_{AN} &= b_A \\ n_{AN} + t_{AM} &= b_A - b_M - b_N \end{aligned}\right\} \quad (6).$$

In Bild 3 ist n_{AN} durch Ziehen von Parallelen zu $\overline{QN}$ bzw. $\overline{MN}$ aus n_{AQ} oder n_{AM} direkt konstruiert worden, während t_{AM} aus t_{AN} oder t_{AQ} nach deren Drehung um 90° in $\overline{AN}$ bzw. $\overline{AQ}$ und nach Ziehen der Parallelen zu $\overline{NM}$ bzw. $\overline{QM}$ und Rückdrehung des Ergebnisses um 90° (Methode der gedrehten Beschleunigungen) gefunden wurde. Schließlich ist aus b_A, mittels der Methode der gedrehten Beschleunigungen b_M und b_N gefunden worden, deren Subtraktion von b_A in der Tat in den Endpunkt der Vektorsumme $n_{AN} + t_{AM}$ führt, wie es nach (6) sein muß.

6. Beispiel: Es sollen jene Systempunkte A gesucht werden, für die $\sphericalangle(n_{AM}, t_{AN}) = \alpha$ und $\sphericalangle(b_A, v_A) = \beta$ vorgeschrieben ist, während M auf einem gegebenen Kreise k, N aber auf einer gegebenen Geraden g liegen soll. Man konstruiert zunächst aus k (Bild 4) mittels der durch den Beschleunigungswinkel ψ gegebenen Drehstreckung den Kreis k', der g in 2 Punkten schneidet. Nach Wahl des einen derselben (N) findet man rückwärts M auf k. Der Systempunkt A muß offenbar auf jenem Kreis k_1 durch M und N liegen, der den Peripheriewinkel $\frac{\pi}{2} + \alpha$ besitzt, und außerdem auf jenem Kreis k_2 durch P und Q, der den Peripheriewinkel $\psi + \beta - \frac{\pi}{2}$ besitzt. Die Kreise k_1 und k_2 schneiden sich im allgemeinen in 2 Punkten, so daß günstigstenfalls 4 Lösungen der Aufgabe existieren[6]).

Prag. Karl Karas. 522

[6]) Man vgl. hinsichtlich des Kreises k_2 L. Burmester: Lehrbuch der Kinematik, Leipzig 1888, S. 807 und Fig. 780 (im zugehörigen Atlas, 3. Lieferung, Tafel 52).

Zur Ingenieur-Axonometrie. Bei der Herstellung anschaulicher Skizzen technischer Gegenstände benutzt der Ingenieur mit Vorteil die „Ingenieur-Axonometrie", d. h. eine senkrechte Projektion, bei der sich die Verkürzungszahlen e_x, e_y, e_z der Koordinatenachsen x, y, z wie $1:2:2$ verhalten[1]). Die Einfachheit dieser Darstellung beruht — vor allem beim Skizzieren von Drehkörpern — darauf, daß sich für die Verkürzungszahlen e_α, e_β, e_γ der drei Koordinatenebenen $\alpha \perp x$, $\beta \perp y$, $\gamma \perp z$ einfache Werte ergeben[2]), nämlich

$$e_\alpha \sim \frac{9}{10}, \qquad e_\beta = e_\gamma = \frac{1}{3}.$$

(Das folgt sofort aus der Forderung

$$e_x : e_y : e_z = 1:2:2$$

und den Gleichungen

$$e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 = 2, \quad e_x^2 + e_\alpha^2 = e_y^2 + e_\beta^2 = e_z^2 + e_\gamma^2 = 1.)$$

Für die Konstruktion dieses Achsenkreuzbildes benutze ich seit Jahren in meinen Vorlesungen statt der üblichen Konstruktionen von Pasternak oder von C. Volk[3]) die folgende einfachere Überlegung. Es sei XYZ das (zunächst noch unbekannte) Spurendreieck, O' der Höhenschnittpunkt, also das Bild des Koordinatenanfangspunktes O, und N der Höhenspurpunkt im rechtwinkligen Dreieck XOY (Bild 1). Die Projektion ist dimetrisch, also $O'Y = O'Z$. Setzen wir $O'N = 1$, so ist im rechtwinkligen Dreieck NOZ, dem „Profildreieck" der Z-Achse: Kathete $ON = 3 \cdot O'N = 3$, Hypotenuse $NZ = 9$, also $O'Z = O'Y = 8$. Nun folgt im Dreieck NZY, daß $NY = \sqrt{63}$, also $YZ = 12 = \frac{3}{2} O'Z$.

Damit ergibt sich folgende Vorschrift: Bei der Ingenieur-Axonometrie wählt man zunächst auf dem Bilde der Z-Achse eine beliebige Strecke $O'Z$ und konstruiert dann den Punkt Y so, daß

$$O'Y = O'Z \quad \text{und} \quad ZY = \frac{3}{2} \cdot O'Z$$

Schließlich wird das X-Achsenbild $\perp YZ$ skizziert, also als Halbierungslinie des stumpfen Winkels zwischen Y- und Z-Achsenbild. Die Seiten des Spurendreiecks werden natürlich nicht mitgezeichnet.

Bei dieser Gelegenheit sei darauf hingewiesen, daß man sich zum wirklichen Einzeichnen von Gegenständen in dieses Achsenkreuz am zweckmäßigsten ein für allemal eine Profilfigur herstellt, die (ohne Benutzung eines Spurendreiecks!) so entsteht (Bild 2):

1. Man zeichnet das Profildreieck NOZ der Z-Achse mit $O'N = 1$ (beliebig!), $O'Z = 8$, $NO = 3$. Es ist zugleich das Profildreieck der Y-Achse.

[1]) Verkürzungszahl einer Geraden oder einer Ebene = Cosinus ihres Neigungswinkels gegen die Bildebene.
[2]) Blatt DIN 5 des Deutschen Normenausschusses.
[3]) C. Volk: Die maschinentechnischen Bauformen und das Skizzieren in Perspektive. Berlin 1942. Pasternak, Enz. Math., XXIV, 1924 bis 1925.

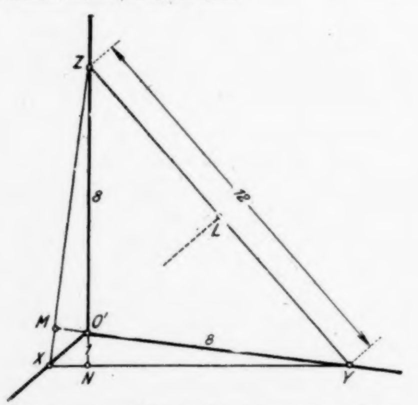


Bild 1. Achsenbild der Ingenieuraxonometrie.

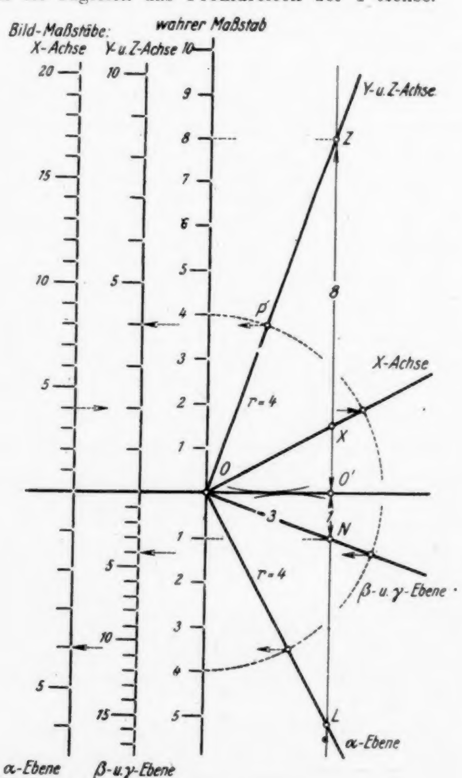


Bild 2 Profilfigur der Ingenieuraxonometrie.

2. Aus dem wahren Maßstab werden mit Hilfe dieses Profildreiecks die Bildmaßstäbe für die Y- und Z-Achse und für die Neigungslinien der β- und γ-Koordinatenebenen $\left(\text{Verkürzungszahl } \frac{1}{3}\right)$ gewonnen. (Die Konstruktionen sind in der Figur durch Pfeile angedeutet.)

3. Aus dem Z-Achsen-Bildmaßstab wird durch Verkleinern auf die Hälfte der X-Achsen-Bildmaßstab hergestellt und daraus das Profildreieck LOX der X-Achse (siehe Bild 1).

4. Aus diesem ergibt sich der Bildmaßstab für die Neigungslinien der Koordinatenebene α $\left(\text{Verkürzungszahl} \sim \frac{9}{10}\right)$

Diese Profilfigur wird so benutzt: Für Strecken, die parallel sind zu den Koordinatenachsen oder parallel zu den Neigungslinien der Koordinatenebenen und deren Maßzahlen bekannt sind, werden die Bildmaßstäbe benutzt. Sind jedoch diese Strecken nicht durch ihre Maßzahlen, wohl aber in einer Grund- und Aufrißzeichnung gegeben, so greift man z. B. die Strecke r, die die Richtung der Z-Achse habe, mit dem Stechzirkel aus der gegebenen Zeichnung ab, trägt sie von O aus auf OZ bis P ab, läßt die Zirkelspitze in P und verkürzt die Zirkelöffnung so, daß die zweite Spitze auf OO' schleift, hat also die verkürzte Höhe im Zirkel. Ebenso wird z. B. durch Benutzung von OL ein Radius r auf $\sim \frac{9}{10} r$ verkürzt, also die Nebenachse der Ellipse gewonnen, die das Bild eines in α liegenden Kreises mit dem Radius r ist. Durch Benutzung dieser (am besten vorgedruckten) Profilfigur werden also die sonst üblichen Umlegungen der Koordinatenebenen und die Umrechnung von Maßen vermieden.

Braunschweig. Fritz Rehbock. 534

Netztafel-Nomogramme aus orthogonalen Kreisscharen. Die nomographische Darstellung einer Funktion $F(a,b,c)=0$ wird man, wenn durch Netztafeln, dann durch solche aus Geradenscharen zu erhalten trachten, schon aus Gründen einfacher Herstellung. Bequem herzustellen sind aber auch Netztafeln mit einer, zwei oder drei Kreisscharen. Das Grundsätzliche über diese Tafelform sowie über ihre an Beispielen durchgeführte Herstellung findet man u. a. bei Werkmeister[1]). Wie aber die dort S. 33 gegebene allgemeine Gleichung zeigt, handelt es sich zumeist um verwickelter gebaute Funktionen $F(a,b,c)=0$, die durch solche Tafeln zu erfassen sind. Bei den einfacheren Fällen ist oft zugleich eine Darstellung z. B. durch Geradentafeln möglich, denen dann der Vorzug zukommt. Bekanntlich benützt man Netztafeln aus 3 Kurvenscharen so, daß man den Schnitt einer bezifferten Kurve der ersten Schar mit einer solchen der zweiten Schar sucht und dann die Bezifferung derjenigen Kurve der dritten Schar abliest, die durch den Schnitt der beiden ersten geht. Das setzt einen scharfen Schnitt der beiden ersten Kurven voraus. Dies ist bei Netztafeln mit Kreisscharen nicht immer und i. a. auch nicht auf allen Teilen derselben Tafel gleichmäßig der Fall, ein weiterer Grund, die Anwendbarkeit der Nomogramme aus Kreisscharen herabzusetzen.

Der letztgenannte Übelstand wird aber grundsätzlich beseitigt, wenn man Tafeln benutzt, bei denen zwei der Kreisscharen zueinander orthogonal sind. Gibt man ihnen die Bezifferung der beiden unabhängigen Veränderlichen, so ist durch ihren immer einwandfreien Schnitt die Kurve der dritten Schar genau zu legen und abzulesen. Wie Werkmeister a. a. O. S. 30 ff. ausführt, benutzt man zum Zeichnen der drei Scharen ein Hilfssystem, in dem die Gleichungen der 3 Scharen ausgedrückt werden. Die Elimination der Hilfsveränderlichen x und y ergibt dann $F(a,b,c)=0$, eben die durch das Nomogramm dargestellte Funktion.

Im folgenden werden zwei orthogonale Kreisscharen (in einfacher und symmetrischer Lage zum Hilfssystem) mit einer dritten, ebenfalls einfachen und einfach gelegenen Geradenschar bzw. Kreisschar kombiniert und daraus nach obigem Verfahren die jeweils dargestellte Funktion $F(a,b,c)=0$ ermittelt. Statt der Parameterwerte der Scharen, d. h. der dargestellten Veränderlichen selbst, wird man in der Endgleichung natürlich Funktionen dieser Veränderlichen $f(a)$, $g(b)$, $h(c)$ setzen können.

A. Die in Bild 1 gezeichneten orthogonalen Kreisscharen haben die Gleichungen

$$\text{A I}: \quad x^2+y^2-2ax-p^2=0$$
$$\text{A II}: \quad x^2+y^2-2by+p^2=0,$$

wobei p die im Bild angegebene Konstante ist.

1. Wählt man als 3. Schar die Ursprungsstrahlen mit der Gleichung $y=cx$, so ergibt die Differenz der Gleichungen A I und A II in Verbindung mit dieser Gleichung die Werte

$$x=\frac{p^2}{cb-a} \qquad y=\frac{cp^2}{cb-a}.$$

Diese werden in A I (oder A II) eingesetzt, und es entsteht nach einigen Umformungen (mit dem Ziel der möglichst symmetrischen Form) die durch das Netz dargestellte $F(a,b,c)=0$ in der Gestalt

$$a^2=c^2(b^2-p^2)-p^2.$$

2. Die 3. Schar sei jetzt die der Parallelen zu einer der Achsen. Derselbe Lösungsweg gibt jetzt im Falle:

$$y=c \qquad \text{bzw.} \qquad x=c$$

die Werte

$$x=\frac{bc}{a}-\frac{p^2}{a} \qquad \text{bzw.} \qquad y=\frac{ac}{b}+\frac{p^2}{b}.$$

Das Einsetzen in A II bzw. A I liefert die dargestellte Funktion

$$(p^2+a^2)(p^2-2bc)+c^2(a^2+b^2)=0$$

für die Schar $y=c$ bzw.

$$(p^2-b^2)(p^2+2ac)+c^2(a^2+b^2)=0$$

für die Schar $x=c$.

3. Die 3. Schar bestehe aus Kreisen um den Ursprung mit der Gleichung $x^2+y^2-c^2=0$. Das Einsetzen von c^2 für (x^2+y^2) in A I und A II ergibt die Werte

$$x=\frac{c^2-p^2}{2a} \qquad \text{und} \qquad y=\frac{c^2+p^2}{2b},$$

und deren Einsetzen in A I und A II führt nach einigen Umformungen zur Gleichung der dargestellten Funktion

$$(c^4+p^4)\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\right)+2p^2c^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right)-4c^2=0.$$

[1]) P. Werkmeister: Das Entwerfen von graphischen Rechentafeln. Berlin 1923.

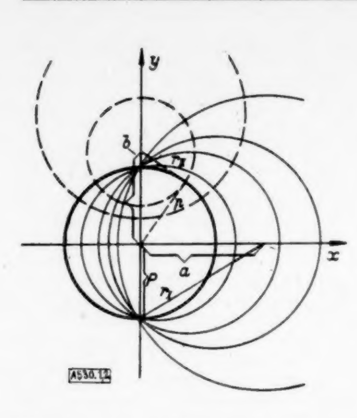
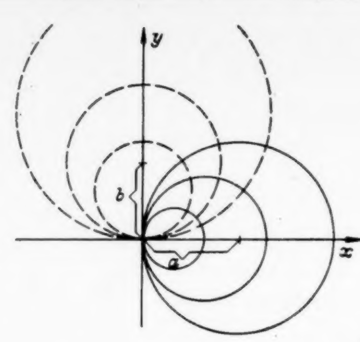



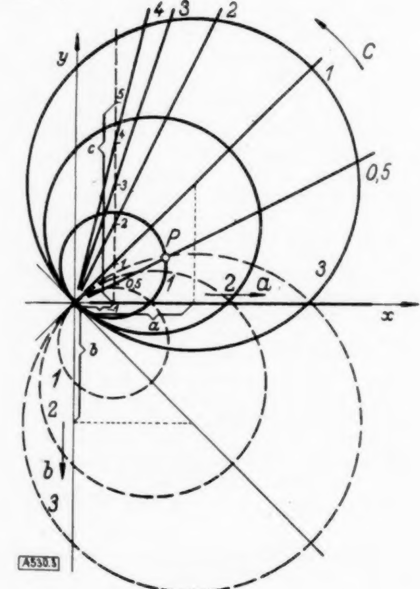
Bild 1 und 2.

Bild 3 (unten). Die Funktion

$$\frac{b}{a}=\frac{1+c}{1-c}.$$

Ablesebeispiel Punkt P:

$a=1 \quad b=3 \quad c=0{,}5.$



Diese Funktion, ebenso wie die unter 2., wird in der Praxis selten vorkommen, so daß sich in diesem Betracht die Herstellung solcher Nomogramme wohl nicht lohnen würde, trotz ihrer erwähnten Genauigkeit und ihrer verhältnismäßig einfachen Herstellbarkeit.

(Kreismittelpunkte		Halbmesser
Schar I :	$x_m=a, \quad y_m=0$	$r^2=p^2+a^2$
Schar II:	$x_m=0, \quad y_m=b$	$r^2=b^2-p^2$.

Die Halbmesser sind nach diesen Gleichungen auch leicht geometrisch zu finden, wie Bild 1 andeutet.)

B. Wenn man in den vorstehenden Endgleichungen $p=0$ setzt, entsteht aus dem Orthogonalnetz von Bild 1 dasjenige des Bildes 2, und aus den Gleichungen unter A 1, 2 und 3 werden bezüglich die folgenden Gleichungen unter B 1, 2 und 3, die man nach dem genannten Verfahren auch unmittelbar aus den Gleichungen der Scharen von Bild 2:

$$\text{B I}: \quad x^2+y^2-2\,a\,x=0$$

$$\text{B II}: \quad x^2+y^2-2\,b\,y=0$$

und einer dritten Schar herleiten kann. Die sich ergebenden einfachen Funktionen seien nun betrachtet.

1. Die 3. Schar besteht aus den Ursprungsstrahlen $y=c\,x$. Dies Nomogramm bringt Werkmeister a. a. O. S. 53. Es stellt einfach die Funktion $a=b:c$ dar. Sind a und b die unabhängigen, c die abhängige Veränderliche, so wird der Ursprung mit dem Schnitt je eines a-Kreises und eines b-Kreises verbunden (wirklich oder bloß durch angelegtes Lineal) und der zugehörige Wert c, sei es auf einer mit c bezifferten Geraden parallel der y-Achse, sei es auf einem mit c bezifferten Kreis um den Ursprung, abgelesen. Statt der Veränderlichen a, b, c können Funktionen derselben, $f(a)$, $g(b)$, $h(c)$, gesetzt werden, so daß entsteht: $f(a)=g(b)\cdot h(c)$. Diese Funktion wird ebensogut dargestellt durch eine Strahlentafel; zwei Scharen $f(a)$ und $g(b)$ sind die Achsenparallelen, die Werte $h(c)$ sind die Steigungen der Ursprungsstrahlen.

2. Die 3. Schar besteht aus den Parallelen zu den Achsen, und zwar folgt für die Schar

$$y=c \qquad \text{bzw.} \qquad x=c$$

als dargestellte Funktion:

$$c=\frac{2\,a^2\,b}{a^2+b^2} \quad \text{bzw.} \quad c=\frac{2\,a\,b^2}{a^2+b^2}$$

oder umgeformt:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{2}{b\,c} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{2}{a\,c}.$$

Setzt man noch im ursprünglichen Ansatz oder in der Endgleichung $2\,c$ für c, so kommt

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{b\,c} \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{a\,c}$$

als verhältnismäßig einfache, durch das Nomogramm dargestellte Funktion. Der große Vorzug (neben der Ablesegenauigkeit) ist die leichte Herstellbarkeit. Es sind

	die Kreismittelpunkte	die Halbmesser
von Schar I :	$x=a, \quad y=0$	$r=a$
von Schar II:	$x=0, \quad y=b$	$r=b$.

3. Die 3. Schar seien Kreise um den Ursprung: $x^2+y^2=c^2$. Die unmittelbare Rechnung oder das Nullsetzen von p in der Gleichung unter A 3 liefert:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{4}{c^2}$$

oder, wenn man $2\,c$ statt c setzt:

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}.$$

Dies Nomogramm übertrifft in der Einfachheit der Herstellung und Anwendung noch das vorige. Zu beachten ist besonders, daß die Mittelpunkte bzw. Halbmesser der beiden Orthogonalscharen linear auf der Achsen aufgetragen werden, nicht quadratisch oder reziprok quadratisch, wie es bei anders gebauten Nomogrammen für dieselbe Funktion der Fall sein würde.

4. Es sei noch das Nomogramm mit denselben Orthogonalscharen besprochen, wenn die 3. Schar aus Parallelen zur 135°-Linie oder zur 45°-Linie besteht. Deren Gleichungen sind:

$$y + x = c \qquad \text{bzw.} \qquad y - x = c .$$

Aus der Differenz B I — B II folgt mit diesen Gleichungen:

$$x = \frac{b\,c}{a + b}, \qquad y = \frac{a\,c}{a + b}$$

bzw.

$$x = \frac{b\,c}{a - b}, \qquad y = \frac{a\,c}{a - b}.$$

Durch Einsetzen in B I und nach einigen Umformungen folgt, mit $2\,c$ statt c,

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{a}\right)$$

bzw.

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)$$

als Gleichung der dargestellten Funktion.

C. Eine ähnlich einfache Lage haben die beiden Orthogonalscharen, wenn ihre Zentralen um 45° geneigt werden (Bild 3). Ihre Gleichungen sind dann

$$\text{C I}: \quad x^2 + y^2 - 2\,a\,(x + y) = 0$$

$$\text{C II}: \quad x^2 + y^2 - 2\,b\,(x - y) = 0 .$$

a und b haben jetzt die im Bild ersichtliche Bedeutung. Als dritte Schar kann man wieder die bisherigen Scharen benutzen.

1. Die dritte Schar besteht aus den Ursprungsstrahlen $y = c\,x$. Die Differenz C I — C II gibt in Verbindung damit die dargestellte Funktion:

$$c = \frac{b - a}{b + a} \qquad \text{oder} \qquad b = a\,\frac{1 + c}{1 - c}.$$

Setzt man $\frac{1 + c}{1 - c}$ gleich $h\,(c)$, so hat man wieder die Funktion unter B 1: $b = a\,c$ mit der Strahlentafel als einfacherer Darstellungsform. Behält man aber c bei oder setzt für c die Funktion $f\,(c)$, so hat das Kreisnomogramm bezüglich Herstellung entschieden einen Vorrang vor der Strahlentafel. Denn bei dieser ist der Ausdruck $\frac{1 + c}{1 - c}$ eine Steigung. Man könnte ihre Werte auf einer Geraden parallel zur y-Achse auftragen, müßte dann aber diese Gerade projektiv nach c teilen; nicht linear. Beim Kreisnomogramm wird dieselbe Gerade linear beziffert. Ein ausgeführtes Beispiel zeigt Bild 3.

2. Als dritte Schar benutzt man die Achsenparallelen

$$y = c \qquad \text{bzw.} \qquad x = c .$$

Die Rechnung gibt

$$x = c\,\frac{b + a}{b - a} \qquad \text{bzw.} \qquad y = c\,\frac{b - a}{b \cdot a}$$

und weiter, mit $2\,c$ statt c, als dargestellte Funktion:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

bzw.

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right).$$

also im wesentlichen dieselbe Funktion wie im Fall B 4.

3. Die 3. Schar seien die Kreise um den Ursprung: $x^2 + y^2 = c^2$. Ersetzen von $(x^2 + y^2)$ durch c^2 in C I und C II gibt 2 Gleichungen in x und y mit den Lösungen

$$x = -\frac{c^2}{4}\,\frac{a + b}{a \cdot b} \qquad \text{und} \qquad y = \frac{c^2}{4}\,\frac{a - b}{a \cdot b},$$

deren Einsetzen in C II ergibt:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{8}{c^2} = 0 .$$

Mit $8\,c^2$ statt c^2 kommt

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{1}{c^2} = 0,$$

naturgemäß dieselbe Funktion wie unter B 3.

4. Die 3. Schar bestehe aus Parallelen zur 135°- bzw. zur 45°-Linie, mit den Gleichungen

$$y + x = c \qquad \text{bzw.} \qquad y - x = c .$$

Die Herleitung liefert

$$x = \frac{c}{2\,b}\,(b + a), \qquad y = \frac{c}{2\,b}\,(b - a)$$

bzw.

$$x = -\frac{c}{2\,a}\,(a + b), \qquad y = \frac{c}{2\,a}\,(a - b).$$

Das Einsetzen in C I bzw. C II ergibt, mit $4\,c$ statt c:

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{a\,c} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = -\frac{1}{b\,c},$$

im wesentlichen dieselbe Funktion wie die unter B 2.

Die Betrachtung zeigt, daß Netztafel-Nomogramme, bei denen zwei Scharen aus orthogonalen Kreisen in einfacher symmetrischer Lage zum zugrundeliegenden Koordinatensystem bestehen, leicht herstellbar sind. Verwendet man sie so, daß die beiden unabhängigen Veränderlichen durch die beiden Kreisscharen dargestellt werden, so ist die Genauigkeit des Nomogramms groß, denn die zugehörige dritte Veränderliche steht an einer Linie, die durch den scharfen Schnittpunkt der beiden Orthogonalkreise gut festgelegt ist. Die durch solche Nomogramme dargestellten Funktionen sind, wenigstens bei den Kreisscharen der Bilder 2 und 3, verhältnismäßig einfach gebaut, was für praktische Anwendungen von Bedeutung ist.

Flensburg. Christian Ahrens. 580

BUCHBESPRECHUNGEN

Dr. LUDWIG **PRANDTL,** Prof. a. d. Univ. Göttingen, Führer durch die Strömungslehre, zugleich dritte Auflage des Abrisses der Strömungslehre. XI + 383 S. m. 314 Abb. Braunschweig 1942, Verlag Friedr. Vieweg & Sohn. Preis geb. 12 M.

Der Prandtlsche „Abriß der Strömungslehre", der nunmehr in 3. Auflage vorliegt, verdankt seine Sonderstellung unter der zeitgenössischen Lehrbuchliteratur der Tatsache, daß er trotz des Verzichtes auf längere mathematische Deduktionen nicht bei den elementaren Gegenständen stehen bleibt, sondern den Leser in klarer und auschaulicher Weise mit den Fragestellungen und Ergebnissen der weitverzweigten modernen Strömungsforschung vertraut macht. Die erste Auflage des Abrisses erschien 1931, die zweite kam 1935 heraus und war im wesentlichen ein unveränderter Abdruck der ersten. Dagegen ist in der jetzt erschienenen dritten Auflage der Umfang des Buches stark angewachsen, von 223 auf 382 Seiten, so daß die Bezeichnung des Werkes als Abriß nicht mehr angemessen erschien.

Einmal sind in den schon bisher vorhandenen ersten vier Abschnitten bedeutsame Modernisierungen und Ergänzungen angebracht worden. Um den umfassenden Standpunkt des Werkes an einem ersten Beispiel zu belegen, sei etwa erwähnt, daß im Anschluß an die technischen Propeller nunmehr auch die im Tierreich auftretenden Propulsionsarten behandelt werden. Vor allem ist aber ein fünfter groß angelegter Abschnitt über Randgebiete der Strömungslehre ganz neu in das Buch aufgenommen worden. In loser Anordnung behandelt dieser Abschnitt Forschungsgebiete, die etwas isoliert von der üblichen Strömungslehre stehen. Die Fachwelt ist dem Verfasser nicht nur für die mühselige Sammlung und Überarbeitung dieses weitschichtigen Materials zu Dank verpflichtet, sondern auch für die erstmalige Mitteilung zahlreicher eigener Überlegungen, die neue Aufklärung bringen. Eine ganze Anzahl dieser Gegenstände hat nahe Beziehungen zu Fragestellungen der Geophysik, so der Sandtransport durch den Wind und die Geschiebebewegung in Flüssen. Speziell mit der dynamischen Meteorologie sind eng verknüpft die Kapitel über Strömungen in geschichteten schweren Flüssigkeiten und über die Strömungen in rotierenden Bezugssystemen, die aber auch für Strömungsmaschinen von erheblicher Bedeutung sind. Technische Sondergebiete betreffen die Ausführung über Kavitation, Wasserschlag und Gleitflächen. Ferner wird das verwickelte Gebiet der aufgezwungenen und der natürlichen Strömungen bei ungleichmäßiger Temperaturverteilung behandelt, also der Fragenkreis, der mit dem Wärmeübergang zusammenhängt. Als „natürlich" wird dabei eine erst durch die Temperaturverteilung selbst erzeugte Strömung bezeichnet. Mit diesen für die Technik wie für die Geophysik in gleicher Weise wichtigen Darlegungen schließt das imposante Werk, das wie kein zweites das universale Eingreifen der modernen Strömungslehre in naturwissenschaftliche und technische Fragestellungen zeigt[1]).

Dresden. W. Tollmien. 547

[1]) Die im Juli 1944 erschienene, vom stehen gebliebenen Satz gedruckte vierte Auflage, weist gegenüber der dritten nur geringe Änderungen auf. Es handelt sich dabei um kleinere textliche Verbesserungen und Ergänzungen, sowie einige Hinweise auf inzwischen erschienene Veröffentlichungen. W.

P. **RAETHJEN,** Einführung in die Physik der Atmosphäre, Bd. II, Meteorologische Aerodynamik. (Hamburger Mathematische Einzelschriften, 33. Heft/1942.) VIII + 257 S. m. 57 Abb. Leipzig und Berlin 1942, Verlag B. G. Teubner. Preis geb. 10 M.

Auch in diesem zweiten Band seiner Einführung in die Physik der Atmosphäre, der die meteorologische Aerodynamik behandelt, hat der Verfasser mit großem pädagogischen Geschick den schwierigen Stoff gemeistert. Vor die mathematische Deduktion, die mit einfachen Beweismitteln die allgemeinen Gesetzmäßigkeiten liefert, wird meist die Beschreibung schlichter Experimente gestellt, durch welche die Fragestellung sinnfällig gemacht wird. Übungsaufgaben dienen dem Leser zur Überprüfung des Verständnisses.

Der Stoff ist in zwei Kapitel geteilt, in kleinräumige und großräumige Aerodynamik. Bei der kleinräumigen Aerodynamik wird die Corioliskraft nicht berücksichtigt. In diesem Kapitel werden also aus der gewöhnlichen Aerodynamik diejenigen Kenntnisse vermittelt, die auch für die meteorologischen Anwendungen grundlegend sind. Gleichzeitig wird aufgewiesen, welche meteorologischen Vorgänge sich noch ohne Berücksichtigung der Erdrotation behandeln lassen. Die Thermodynamik spielt bei den Ausführungen über Cumulusaufwind und Thermikaustausch sowie über Feuchtlabilitätsenergie hinein. Die der dynamischen Meteorologie eigentümlichen Züge kommen allerdings erst recht in dem Kapitel über großräumige Aerodynamik zur Geltung. Der Aufbau dieses reichhaltigen Kapitels sei durch die Paragraphenüberschriften gekennzeichnet: Rotationsmoment und Trägheitskreis; Coriolisbeschleunigung und reibungslose Strömungsgleichungen; die bodennahe Reibungsschicht; Strömungsgleichgewicht der freien Atmosphäre; Wetterluftmassen, Frontalzonen, Grenzflächen; Stabilität und Labilität des geostrophischen Windfeldes; Zirkulationsbeschleunigung.

Es ist gewiß, daß dieses Buch durch seine angenehme Darstellungsart und die ständige Bezugnahme auf die meteorologische Praxis diesem schwierigen, aber zukunftsreichen Zweig der Strömungslehre neue Freunde erwerben wird.

Dresden. W. Tollmien. 548

Dr. sc. techn. ERWIN **HOECK,** Druckverluste in Druckleitungen großer Kraftwerke. Bericht über die Arbeiten der Druckverlustkommission des Schweizerischen Ingenieur- und Architektenvereins. (Mitteilungen aus der Versuchsanstalt für Wasserbau an der Eidg. Techn. Hochschule in Zürich Nr. 3.) 75 S. m. 45 Abb. Zürich 1943, Verlag AG. Gebr. Leemann & Co. Preis Fr. 10,— + 4% Umsatzsteuer und Porto.

In der vorliegenden Mitteilung wird ausführlich über ausgedehnte Messungen des Druckverlustes in den Druckleitungen zahlreicher schweizerischer Kraftwerke berichtet. Eine ausführliche Diskussion wird in der Richtung geführt, dem Ingenieur verbesserte Mittel zur Berechnung neuer Anlagen an die Hand zu geben. Sie erfolgt an Hand der Widerstandsformeln für rauhe Rohrleitungen von Prandtl-Nikuradse, Chézy, Strickler, Ludin. Es zeigt sich, daß moderne, vollständig geschweißte Rohrleitungen (mit Ausnahme ganz neuer spiegelglatter) bei den praktisch in Betracht kommenden großen Re ein quadratisches Widerstandsgesetz liefern, daher sowohl nach Nikuradse, wie auch nach Chézy oder Strickler berechnet werden können, wenn man die äqui-

valente Sandrauhigkeit bzw. die Widerstandskoeffizienten aus den berichteten Messungen entnimmt, wofür eine geeignete Tabelle und ein entsprechendes Kurvenblatt gegeben werden. Dagegen bieten Leitungen mit genieteten Quernähten und geschweißten oder genieteten Längsnähten mehr Schwierigkeiten. Hier kann nach den Messungsergebnissen die Formel von Ludin ($v = k \cdot r^{0,65} \cdot J^{0,54}$) am besten verwendet werden. Alles in allem genommen muß die sehr gründlich durchgeführte Arbeit als ein wichtiger Beitrag zum Problem des technischen Rohres großer Abmessungen gewertet werden, wenn auch in Anbetracht der vielgestaltigen Möglichkeiten die sichere Klassifizierung nach wie vor weiter Schwierigkeiten bieten wird.

Leipzig. L. Schiller. 532

Dr.-Ing. habil. KARL **KLOTTER,** Prof. a. d. Techn. Hochschule Berlin, Messung mechanischer Schwingungen (Dynamik der Schwingungsmeßgeräte). IX + 151 S. m. 80 Abb. Berlin 1943, Springer-Verlag. Preis brosch. 8,40 M.

Die Bücher über Meßgeräte befassen sich vorwiegend mit beschreibenden Darstellungen ihrer Wirkungsweise und ihrer Handhabung, während die theoretischen Unterlagen nur in Einzelfällen wiedergegeben werden. Das vorliegende Buch behandelt in systematischem Aufbau die Dynamik der Geräte zur Messung mechanischer Schwingungen. Nach einem kurzen Abriß der Schwingungslehre, bei der von der anschaulichen vektoriellen Darstellung weitgehend Gebrauch gemacht wird, werden die für Meßgeräte wichtigen Vergrößerungsfunktionen, Phasenverschiebungswinkel und Phasenverschiebungszeiten dargestellt. Mit diesen Grundlagen werden die Geräte zur Kraft- und Bewegungsmessung, die auch die Geschwindigkeits-, Beschleunigungs- und Rückmessung mit umfaßt, hinsichtlich ihrer Abstimmung und zweckmäßigen Dämpfung erläutert. Im einzelnen werden bei der Bewegungsmessung die Anordnungen mit und ohne Festpunkt, sowie mit Feder- und mit Reibungsfesselung erörtert. Im letzten Abschnitt des Buches werden die Verfahren zur Entzerrung bei nicht-periodischen Einwirkungen beschrieben. Das Buch schließt eine merkliche Lücke im Fachschrifttum und bildet für jeden mit Aufgaben des Messens betrauten Wissenschaftler ein notwendiges Rüstzeug. Auch der Schwingungstheoretiker wird in dem mit großer Sorgfalt ausgearbeiteten Buch, dessen geschlossene Darstellungsweise allerdings das auszugsweise Nachlesen einzelner Abschnitte erschwert, eine Reihe neuer Anregungen finden.

Stuttgart. P. Riekert. 529

Dr. sc. techn. EL-SAYED **EL-SCHASLY,** Biegungsspannungen und Stabkräfte in Schwedlerkuppeln nach Theorie und Modellversuch, mit einer Anwendung aus dem Flugzeugbau. (Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik an der Eidg. Techn. Hochschule Zürich, herausgegeben von Prof. Dr. M. Ritter und Prof. Dr. F. Stüssi, Nr. 12.) 185 S. m. 76 Fig. u. 3 Tafeln. Zürich u. Leipzig 1943, Verlag A. G. Gebr. Leemann & Co. Preis brosch. 9 M.

Die Fehler, die sich durch die Annahme von reibungslosen Gelenken an Stelle der biegesteifen Anschlüsse der Stäbe räumlicher Fachwerke im allgemeinen und bei der Schwedlerkuppel im besonderen ergeben, sind durch mehrere Beiträge zur Berechnung räumlicher Fachwerke mit zyklischer Symmetrie bekannt. Man weiß, daß sich der Spannungszustand der idealen Schwedlerkuppel mit reibungslosen Gelenken wesentlich von dem Kräftebild der ausgeführten Stahlkonstruktion unterscheidet. Der Verfasser hat sich in seiner Arbeit die dankenswerte Aufgabe gestellt, die einzelnen Annahmen zur statischen Untersuchung derartiger Tragwerke, die Schwedlerkuppel mit gelenkigen Stabanschlüssen, die Schwedlerkuppel mit biegesteifen Sparren, die Schwedlerkuppel mit biegesteifen Ringen, die Bedeutung des biegesteifen Laternenringes für den Spannungszustand und die Schwedlerkuppel, mit biegesteifen Sparren und Ringen, insbesondere mit biegesteifen Sparren und biegesteifem Schlußring zu untersuchen, an Hand eines Zahlenbeispiels quantitativ zu klären und damit die Bedeutung der Annahmen zur Vereinfachung der Rechnung zu bewerten. Die Brauchbarkeit der Rechnung ist darauf durch die Messung von Spannungen und Knotenverschiebungen an einem Zelluloidmodell geprüft und durch die statische Untersuchung der Rumpfnase eines mehrmotorigen Flugzeugs mit gutem Erfolg gezeigt worden. Die Arbeit zeichnet sich durch Sorgfalt und Sachkenntnis aus. Sie ist als Dissertation der Eidgenössischen Technischen Hochschule Zürich erschienen und kann als Vorbild für ähnliche Untersuchungen aus dem Fachgebiet der Bauingenieurwissenschaften dienen.

Dresden. K. Beyer. 543

Dr. ABD-EL-AZIZ **EL-AROUSY,** Studien über das elastische Verhalten von Brückengewölben einschließlich des Zusammenwirkens mit dem Aufbau. (Mitteilungen aus dem Institut für Baustatik an der Eidg. Techn. Hochschule Zürich, herausgegeben von Prof. Dr. M. Ritter u. Prof. Dr. F. Stüssi, Nr. 13.) 132 S. mit 23 Abb. Zürich u. Leipzig 1942, Verlag A. G. Gebr. Leemann & Co. Preis brosch. 7,20 M.

Das elastische Zusammenwirken eines Bogenträgers mit dem aufgesetzten oder angehängten Fahrbahnrost ist in der deutschen technischen Literatur mehrfach und zuerst wohl von Schachenmayer im Jahre 1908 in einer Arbeit über mehrfache Brückengewölbe untersucht worden. Die Verbindung der beiden Baukörper besitzt ohne Zweifel für die strenge Beschreibung des elastischen Zusammenhangs und damit für die zuverlässige Beurteilung der Festigkeit von Bogenträger und Fahrbahnrost Bedeutung. Die Untersuchung wird indessen in der Regel unterlassen, da der Verschiebungszustand eines eingespannten Bogenträgers unter der Wirkung der Nutzlast klein ist und vernachlässigt wird, also die Festigkeit des Fahrbahnrostes für die Nutzlasten unter der Annahme eines starren Bogenträgers mit unverschieblichen Anschlüssen der Pfosten untersucht wird. Sie führt außerdem auf die Bearbeitung eines hochgradig statisch unbestimmten Tragwerks und verlangt die Auflösung eines weitgehend zusammenhängenden fehlerempfindlichen Systems von linearen Gleichungen. Die Zusatzspannungen aus dem Zusammenwirken von Bogen und Fahrbahnrost gelten dann als Nebenspannungen. Diese werden von dem Verfasser nach verschiedenen Ansätzen qualitativ und quantitativ an Hand zahlreicher Tabellen und Beispiele sorgfältig untersucht, so daß der Leser ein gutes Bild über den Einfluß des elastischen Zusammenhangs auf den Spannungszustand des Tragwerks gewinnt. Darin liegt der Wert der Veröffentlichung. Das Studium der Arbeit bietet jedenfalls dem Leser, insbesondere dem Entwurfsverfasser von Bogenbrücken, wertvolle Anregungen und kann aus diesem Grunde bestens empfohlen werden.

Dresden. K. Beyer. 544

ZUSCHRIFTEN AN DEN HERAUSGEBER

F. Schubert, **Zur Theorie des stationären Verdichtungsstoßes.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 23 (1943), S. 129 bis 138.

Die in obiger Arbeit hergeleiteten Formeln, die die Zustandsgrößen hinter einem schrägen Verdichtungsstoß als Funktion von $M_1 \sin \gamma$ darstellen, wobei M_1 die Machsche Zahl vor dem Stoß und γ den Neigungswinkel des Stoßes gegen die Anströmrichtung bezeichnet, sind bereits in einem französischen Lehrbuch enthalten. Im Jahre 1921 ist von L. Jakob ein Buch „La Résistance de l'Air et l'Expérience — Les Conséquences", Tome I im Verlag Doin, Paris, erschienen, in dem auf S. 250 die Formeln (45) bis (51) zusammengestellt sind, die mit denen von F. Schubert genau übereinstimmen. Lediglich in Formel (50) ist im Nenner ein Summand vergessen worden, wie auch Tesson erwähnt hat, der in seiner Arbeit „Contribution à l'étude des ondes de dérangement" in den Comptes Rendus, Bd. 217, 1943, S. 208 auf obiges Buch hingewiesen hat.

Braunschweig. E. Groth.

Erwiderung. Das von Herrn Groth erwähnte Buch von L. Jakob ist mir nicht bekannt. Dem Titel nach dürfte es sich weniger um ein Lehrbuch als um eine Monographie handeln. Da ich das Buch von Jakob bisher nicht einsehen konnte, war es mir noch nicht möglich, die Herleitungen von L. Jakob mit den meinigen zu vergleichen. Ein wesentlicher Gesichtspunkt meiner Arbeit war aber gerade die möglichst einfache und durchsichtige Beweisführung. Daß manche der Formeln als solche schon anderweit mitgeteilt waren, hatte ich, soweit mir dies noch vor der Veröffentlichung bekannt wurde, schon angemerkt (vgl. Fußnote 3 meiner Arbeit). Jedenfalls hatte sich die vorteilhafte Parameterdarstellung der Verdichtungsstoßtheorie nicht durchgesetzt. Meine Arbeit war aus der Praxis der Berechnungen kompressibler Strömungen erwachsen und sollte dieser Praxis wieder dienen, wofür nicht zuletzt die ausführlichen Zahlentafeln und einfachen Diagramme Zeugnis ablegen. F. Schubert. 553

H. Karl, **Biegung gekrümmter, dünnwandiger Rohre.** Z. angew. Math. Mech. Bd. 23 (1943), S. 331 bis 345.

Im Rahmen meiner Mitarbeit in einem Sonderausschuß des Kriegsmarine-Normenausschusses habe ich mich vor einigen Jahren mit theoretischen Untersuchungen über die Beanspruchung und die Formänderung von glatten Rohrkrümmern infolge von Biegemomenten befaßt, die in bzw. senkrecht zu der Ebene des Krümmers wirken. Ich bin dabei abweichend von den Kármánschen Ableitungen nicht von der Formänderung, sondern von den Gleichgewichtsbedingungen am Krümmerelement ausgegangen und habe für die Spannungen in der Umfangsrichtung des Krümmers (Längsspannungen) genau die gleichen trigonometrischen Reihenentwicklungen gewählt, wie sie auch in der Arbeit von Herrn Dr.-Ing. Karl benützt werden. Die Koeffizienten dieser Reihen habe ich dann in bekannter Weise aus den Bedingungen für das Minimum der Formänderungsarbeit ermittelt; im Hinblick auf die für praktische Anwendungen erforderliche Genauigkeit habe ich mich mit der zweiten Näherung begnügt. In meinen Ableitungen ist die Verschiedenheit der Krümmungsradien vernachlässigt; den Einfluß der Spannungen in der Umfangsrichtung des Rohrquerschnitts (Tangentialspannungen) sowie der Querkontraktion habe ich nur bei Ermittlung der Werte für die erste Näherung berücksichtigt. Die Ergebnisse meiner Untersuchungen waren entsprechend den grundsätzlich gleichen Ansätzen völlig die gleichen wie diejenigen, die Herr Dr.-Ing. Karl in den Abschnitten B Ib, B II und C III seines Aufsatzes erhalten hat.

Eine Veröffentlichung meiner Ausarbeitungen ist bisher noch nicht erfolgt; die Ergebnisse derselben sind jedoch bereits längere Zeit vor Einreichung der Dissertation des Herrn Dr.-Ing. Karl (im Dezember 1941 bzw. Januar 1942) mehreren Mitgliedern des oben genannten Sonderausschusses bekanntgegeben worden.

Darmstadt. R. Wälde.

Erwiderung. Die Anwendung des Castiglianoschen Minimalprinzips zur Bestimmung der Biegung von Rohrkrümmern durch Biegemomente in der Krümmerebene und senkrecht zu dieser war durch Arbeiten von Lorenz und Weber bekannt. Im Gegensatz zur nichtveröffentlichten Arbeit von Herrn Prof. Wälde wird in meinem Aufsatz nicht nur die zweite Näherung gebracht, sondern die allgemeine Lösung für beide Minimalprinzipien und damit eine Eingrenzung und Fehlerbestimmung. Außerdem wird noch für die allgemeine Lösung der Einfluß der Querzusammenziehung und des Krümmungsverhältnisses untersucht und die Übereinstimmung der Koeffizienten für beide Arten von Biegemomenten für das Krümmerelement nachgewiesen.

Dresden. H. Karl. 560

NACHRICHTEN

Persönliches.

Der Dozent für reine und angewandte Mathematik an der Techn. Hochschule Berlin, Dr. phil. habil. Günther Schulz, wurde zum außerplanmäßigen Professor ernannt.

Dr.-Ing. habil. Karl Marguerre wurde unter Belassung am Institut für Festigkeit der Deutschen Versuchsanstalt für Luftfahrt zum a. o. Prof. im Reichsdienst ernannt.

Der Dozent an der Techn. Hochschule Karlsruhe, Dr. habil. L. Collatz, wurde am 31. 12. 1943 als Nachfolger des verstorbenen Prof. Dr. G. Prange zum o. Prof. der Mathematik an der Techn. Hochschule Hannover ernannt.

Als Nachfolger von Prof. M. Lagally wurde der em. ord. Prof. der Bergakademie Freiberg Dr. Fr. A. Willers zum ord. Prof. der angewandten Mathematik an der Techn. Hochschule Dresden ernannt.

Der em. o. Prof. der angewandten Mathematik an der Techn. Hochschule Dresden, Dr. M. Lagally, wurde zum Mitglied der mathematisch-physikalischen Klasse der sächsischen Akademie der Wissenschaften gewählt.

Die vor 50 Jahren vom VDI gestiftete Graßhof-Denkmünze, die als erster C. von Bach erhielt, wurde nach mehrjähriger Pause in diesem Jahr wieder verliehen, und zwar an Prof. Dr. A. Thum.

Bei einem Luftangriff kam der Dozent an der Techn. Hochschule Braunschweig, Dr.-Ing. habil. Walter Hantzsche, ums Leben.

Für den Textteil verantwortlich: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden-A. 20, Dorotheenstr. 12. — Printed in Germany. —
 — Druck von A. W. Zickfeldt, Osterwieck am Harz.